

16.4.5.

A N A L Y S I S

Æ Q U A T I O N U M.

AUCTORE ^{William}
~~GILL~~ HALES, D.D.

COLL. S. TRIN. DUBLIN. SOCIO.

DUBLINII:

EXCUDEBAT JOSEPHUS HILL.

M DCC LXXXIV.

Math 2257.84

✓
P R Æ P O S I T O

S O C I I S

ET

S C H O L A R I B U S

COLLEGII S. TRINITATIS DUBLIN.

TRACTATUM HUNC

QUA PAR EST OBSERVANTIA

DICAT, DEDICAT

GUILLIELMUS HALES.

CORRIGENDA.

Pag. 8, lin. 7, lege *inter*—p. 12, l. 2 a fine, leg. $48x$ —
 p. 15, l. 4, leg. $+ px$ —p. 30, l. 4, leg. $\sqrt{\frac{o+o+2}{2}} + \sqrt{\frac{o-o-2}{2}}$
 —p. 78, l. 7 a fine, leg. *befbx*—p. 107, l. 9 a fine, leg. $6\frac{7}{12}$
 —p. 119, l. 6, leg. *ternis*—p. 134, l. ult. leg. 1767—p.
 166, l. 9, leg. *æquationis*—p. 176, l. 3, leg. *coefficiens*; l. 5,
 dele *e*; l. 6, leg. *e regione*—p. 177, l. 3, leg. $-1 \pm \sqrt{3}$
 —p. 190, l. 2 a fine, leg. *irreducibile*—p. 193, titul. leg.
radicis—p. 207, l. 4 a fine, leg. $15c^3$.

P R Æ F A T I O.

ÆQUATIONUM Theoria, utpote permagni in matheſi momenti, trecentos ferme per annos, a tempore Lucæ de Burgo ad uſque præſens, Analyſtarum ingenia exercuit. Veruntamen fatendum eſt, quod Analyſtæ maximi, inventis ſuis algebræ fines extendere ut plurimum ſatagunt, de inventorum evidentia demonſtrationibus validis atque legitimis ſtabiliendâ parùm ſolliciti; “quoniam hæ ſatis faciles ſibi viſæ ſunt, & nonnunquam abſque nimis ambagibus tradi non poſſent”—quales memorat cauſas Newtonus, in Arithmetica Univerſali, cur, æquationum proprietates docens, demonſtrationes non ſemper adjunxit. Hanc itaque curam poſteris legant. Inde vero fit, quod regulas æquationum præſtantiffimas, vel imperfecte tradunt, vel quaſi demonſtrationibus idoneis deſtitutas omittunt omnes fere algebræ inſtitutiones. Sic, ut pauca exempla e multis proferam, Newtoni celeberrimum theorema binomium, necnon germanum illud de inveniendis ſummis poteſtatum radicum æquationis; vel nullis, vel minus accuratis, vel denique alieno ex fonte petitis demonſtrationibus, omnibus fere in libris elementariis extant: Cartefii theorema egregium de numero radicum affirmativarum & negativarum æquationis dignoſcendo, plerique abſque demonſtratione tradunt, nonnulli negligunt: Methodus vero detegendi radices æquationum impoſſibiles, ſi quæ ſint, earumque numerum, exceptâ regulâ quadam imperfectâ a

Newtono traditâ, ex omnibus exulat. Hunc igitur defectum, aliquatenus saltem, supplere, nostri instituti est ratio; ne scientia præstantissima quidem, & quæ ipsi geometriæ vix forsan evidentia cederet, si modo lucido ordine & methodo veterum Geometrarum insisterent Analystæ, falso incertitudinis crimine premi videatur. Newtoni Arithmeticam Universalem potissimum, ut interpres secutus sum, in consilium subinde adhibitis, peritissimis in re mathematicâ ingeniis, Wallis, M^cLaurin, Saunderfon, De Moivre, Simpson, Clairaut, D'Alembert, Euler, La Grange, Waring, Bertrand, Landen, Hutton, &c. &c. qui aut scriptis Newtoni illustrandis, aut algebræ limitibus latius proferendis felicissime operam dederunt. Cursim quoque adstruitur brevis historia præcipuarum inventionum analyticarum, ad levandum disquisitionis abstrusioris tædium; & notantur auctores quorum ex scriptis pleniorum harum rerum cognitionem haurire licet. Quid ipse præstiterim aliorum esto judicium. Hoc saltem præmonitos velim lectores, quod opus elementarium methodo elegantissimâ absolvere, analysi brevissimâ & simul perspicuâ, synthesi concinnâ & minime operosâ, longe difficillimum est. Un petit génie pourra s'imaginer qu'il est facile de faire un livre élémentaire clair & précis—les vrais Savans en connoissent la difficulté.

Sauri, Institutions Mathématiques.

INDEX CAPITUM.

	Pag.
<i>DE natura æquationum</i> - - - - -	1
<i>De dimensionibus æquationum</i> - - - - -	6

PARS PRIMA.

<i>De concinnanda æquatione solitaria</i> - - - - -	9
<i>De reductione æquationum quadraticarum</i> - - - - -	13
<i>De radicibus æquationum quadraticarum</i> - - - - -	16
<i>De reductione æquationum quæ ordini quadraticarum adscribendæ sunt</i> - - - - -	26
<i>De extractione radice surdæ quadrati binomii</i> - - - - -	28
<i>De theoremate binomio</i> - - - - -	33
<i>Theorematis binomii investigatio</i> - - - - -	37

PARS SECUNDA.

<i>De æquatione finali ex duabus pluribusve mediis elicienda</i> -	49
<i>De unica incognita quantitate e duabus æquationibus tollenda</i> -	50
<i>De exterminatione plurium quantitatum incognitarum e pluribus æquationibus</i> - - - - -	73
<i>De exterminatione quantitatum surdarum ex æquationibus</i> - -	81
<i>De problematis indeterminatis</i> - - - - -	84

PARS TERTIA.

<i>De natura radicum æquationis</i> - - - - -	111
<i>De numero radicum æquationis</i> - - - - -	115

	Pag.
<i>De coefficientibus & signis terminorum æquationis</i>	119
<i>De numero radicum affirmativarum & negativarum æquationis</i>	132
<i>De transmutationibus æquationum</i>	139
<i>De resolutione æquationum radices rationales habentium</i>	163
<i>De limitibus æquationum</i>	166
<i>De inventione divisorum compositorum æquationis</i>	171
<i>De inventione divisorum æquationum literalium quarum termini sunt homogenei</i>	177
<i>De resolutione æquationum duas pluresve radices inter se æquales habentium</i>	179
<i>De radicibus æquationum cubicarum</i>	183
<i>De resolutione æquationum cubicarum</i>	185
<i>Investigatio radices binomii cubi</i>	193
<i>De resolutione æquationum cubicarum per extractionem radices binomii cubi</i>	201
<i>De resolutione æquationum cubicarum per series infinitas</i>	204
<i>De æquationum biquadraticarum resolutione</i>	216
<i>De limitibus radicum singularum æquationis</i>	221
<i>De resolutione æquationum per approximationem</i>	228

DE NATURA ÆQUATIONUM.

§. 1. **Æ**QUATIONES sunt quantitatum aut sibi mutue æqualium, aut simul nihilo æquipollentium congeries. Priores appellantur *canonicæ*, posteriores *originales*.

2. Duobus modis considerandæ veniunt æquationes, vel ut ultimæ conclusiones ad quas in Problematis solvendis devenitum est, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirendæ sunt. Æquatio finalis ex unica tantum quantitate incognita cognitis involuta conflatur, modò Problema definitum sit et aliquid certi quærendum innuat. Mediæ autem, quæ problematum condiciones designant, plures involvunt quantitates incognitas, atque ideo debent inter se comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui inest unica quam quærimus incognita quantitas admista cognitis: cujus reductione quantitatis incognitæ valor comparandus est.

3. Proposita igitur quæstione aliquâ, artificis ingenium in eo præsertim requiritur ut omnes ejus condiciones totidem æquationibus designet. Ad quod faciendum, perpendat imprimis an propositiones sive sententiæ quibus enunciatur sint omnes aptæ quæ terminis algebraicis designari possint, haud secus quam conceptus nostri characteribus græcis vel latinis. Et si ita, (ut solet in quæstionibus quæ circa numeros vel abstractas quantitates versantur) deinde nomina quantitatum ignotis atque etiam notis, si opus fuerit, imponat; & sensum quæstionis, sermone, ut ita loquar,

* Algebraistæ antiquiores solas quantitates incognitas per literas designarunt, notas autem per ipsos numeros; puta, $A - 10 = 24$. Usum literarum alphabeti vice signorum antea adhibitorum primus introduxisse fertur *Buteo*, qui Tractatum Algebraicum edidit anno 1559. Recentiores vero post *Vietam* fere omnes designant quantitates tam datas quam quæsitæ per literas aut species, cum magno artis

analytico designet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos sic translatæ, tot dabunt æquationes quot ei solvendæ sufficiunt.

4. Quemadmodum si quærantur duo numeri quorum summa sit 140, et productum 3136. Designantibus x et y , numeros quæritos, quæstio deducitur ad æquationes $x + y = 140$, et $xy = 3136$. Quarum ope per regulas. mox tradendas investigandi sunt x et y .

5. Aut, si quærantur tres numeri continue proportionales, quorum summa sit $20 = a$, et quadratorum summa $140 = b$. Sint numeri quæriti x , y et z , et ex quæstione prodeunt æquationes $xz = y^2$, $x + y + z = a$, et $x^2 + y^2 + z^2 = b$. Quarum reductione eruendi sunt x , y et z .

6. Cæterum notandum est, solutiones quæstionum eo magis expeditas et artificiosas ut plurimum evadere quo pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Aliquando autem harum aliquam ex quæstionum conditione aliqua designare licebit, dum ex conditionibus reliquis elicientur æquationes quæ in solutionem postulantur.

analyticæ emolumento, sive laboris inter operandum minuendi, sive theorematum generalium eliciendorum gratiâ. Hinc distinctionis ergo, forma vetustior appellatur *Algebra numerosa*, recentior *speciosa*. At vero *Vieta*, eumque secuti *Oughtredus* alique, usi sunt literis majusculis; hodierni fere omnes partim brevitatis et compendii causâ, partim ad evitandam confusionem quæ aliter in praxi non raro extaret, ex eo quod literæ majusculæ designandis figurarum geometricarum lineis tribuuntur, adhibent minusculas. Quantitates datas distinxit *Cartesius* per literas alphabeti primas, a, b, c , &c. quæritas autem per ultimas x, y, z , &c. Quantitatum potestates primus quoque designavit indicibus integris a^2, a^3, a^4 , &c. Quantitatum radices designasse fertur *Albertus Girardus* indicibus fractis, $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}$, &c. pro $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}$, &c. Quantitates reciprocas indicibus negativis notavit *Wallisius*, pro $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$, &c. scribendo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} , &c. quæ et usum indicum indefinitorum et surdorum introduxit. Cæterum ex quo invaluit indicum numeralium usus, ut evitetur confusio, coefficientes numerales literis præfixæ sunt, quas affigebant vetustiores scribendo nimirum $3x$ pro $3x$.

Sic in quæstione priore, ex una conditione quod summa quantitatum incognitarum sit 140, unam designante x , alteram designabit $140 - x$; ex altera conditione autem elicietur æquatio $x \times 140 - x = 3136$, cujus reductio dabit x . Atque in quæstione altera, ex prima conditione quod numeri quæsi sint continue proportionales, exponentibus x et y , primum et secundum, exponet $\frac{y^3}{x}$, tertium; ex reliquis autem conditionibus prodeunt duæ æquationes, $x + y + \frac{y^3}{x} = a$ et, $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b$. Quarum reductione x , et y determinandi sunt. Interdum etiam plures vel omnes quantitates incognitas ex conditionibus quæstionum designare fas erit. Ut ex sequentibus patebit.

7. Et si desideratas quantitates ut plurimum immediate quærere solemus, si quando tamen duæ obvenerint ambiguae, hoc est, quæ conditionibus omnino similibus præditæ sunt (ut quatuor numerorum continue proportionalium duo medii et duo extremi) præstat alias quantitates non ambiguas quærere, quas inter et hæc intercedit nota quædam relatio, quemadmodum harum summam vel differentiam, vel rectangulum.

8. Nonnumquam quæstiones geometricæ eadem facilitate iisdemque legibus ad æquationes redigi possunt ac quæ de abstractis quantitativis proponuntur, ubi scilicet solæ quantitativarum proportionum absque positionibus linearum considerandæ veniunt. Ut si data quædam recta in media et extrema proportionem secunda sit; designante a rectam datam, et x segmentum majus, erit $a - x$ segmentum minus, et $x^2 = a \times a - x$; æquatio quæ per reductionem dabit x .

9. Quod si sermo quocumque status quæstionis exprimitur ineptus videatur qui in algebraicum possit verti, paucis mutationibus adhibitis, et ad sensum potius quam verborum

sonos attendendo expeditur versio. Cæterum methodum redigendi hujusmodi problemata ad æquationes certis legibus vix instituere fas est, cum ex proprio cujusque analystæ ingenio plurimum pendeat; exemplis fane et exercitatione facilius quam præceptis illustranda et addiscenda est. Placet igitur jam paucas instantias adjungere.

10. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis £100 quas annuatim impendit in familiam, et post tres annos fit duplo ditior; quærentur nummi?

Plures latent in hac quæstione propositiones, quæ omnes sic eruuntur et enunciantur.

Mercator habet nummos

quosdam x

Ex his anno primo

expendit £100 $x - 100$

Et reliquum adauget

triente $x - 100 + \frac{x - 100}{3}$ sive $\frac{4x - 400}{3}$

Annoque secundo

expendit £100 $\frac{4x - 400}{3} - 100$ sive $\frac{4x - 700}{3}$

Et reliquum adauget

triente $\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ sive $\frac{16x - 2800}{9}$

Et sic anno tertio expendit

£100 $\frac{16x - 2800}{9} - 100$ sive $\frac{16x - 3700}{9}$

Et reliquum adauget triente

. $\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$ sive $\frac{64x - 14800}{27}$

Fitque duplo ditior quam

sub initio $\frac{64x - 14800}{27} = x$.

Quæstio itaque ad æquationem $\frac{64x - 14800}{27} = x$ perducitur, cujus reductione eruendus est x .

11. Ex epitaphio quodam Arithmetico quæritur ætas Diophanti celeberrimi analystæ Alexandrini qui Anno 365 circiter floruit, et primus extat Algebræ scriptor apud Græcos.

Οὗτος τοι Διόφαν' ἔχει τάφος, ᾧ μέγα θαῦμα

Καὶ τάφος ἐκ τεχνῆς μέτρα βίοιο λέγει.

Ἐκτὴν κυρίῃ βιότῃ Θεὸς ᾤπασε μαῖρην,

Δωδεκάτῃ δ' ἐπίθεις μῆλα πόρεν χλοάειν.

Τῇ δ' ἂρ' ἐπ' ἐβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἤψατο φέγγος,
 Ἐκ δ' ἑ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.

Αἷ' αἶ' τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός,
 Τῷ δ' ἐκαὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βίότη.

Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνι αὐτοῖς

Τῇ δ' ἐπύσθη σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίη;

Indicat utique epitaphium, *Diophantum* sextam ætatis partem egisse puerum; partem inde duodecimam, puberem; completa ætatis parte septima post, uxorem duxisse; interjecto autem quinquennio, filium genuisse; qui semissem paternæ ætatis quum attigisset, diem obiit supremum; patrem vero quadriennio post, fato quoque cessisse. Quæritur igitur *Diophanti* ætas: sive in genere, quæritur numerus cujus partes sexta, duodecima, septima adjuncto quinario, et semissis adjuncto quaternario, simul conficiant totum. Sit numerus quæsitus x , et habebitur æquatio $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{2}x + 5 + \frac{1}{4}x + 4 = x$. Cujus reductione cruendus est x .

12. Quod si quæstio ipsa omnes conditiones quæ in solutionem postulantur non suppeditet, evolvendæ sunt quantitatuum tum datarum tum quæsitarum relationes, quoquo modo compertæ, si quæ aptæ sint equationibus rite pariendis. Hoc pacto etenim problemata, quæ primo conspectu insolubilia videntur, præsertim in *physicis* vel *mixtâ mathesi*, haud raro solutionem subire coguntur. Sic opificis fraudem, qui furatus est partem aliquam auri quod coronæ votivæ conflandæ gratiâ ei commiserat *Hiero*, et argento substituto coronam justî ponderis fabricavit, neutiquam detexisset *Archimedes*, rege jubente, ex datis tantum coronæ ipsius pondere et mole, ni pondera specifica auri et argenti insuper in computum adsciverat^b. Uti posthac ostendetur in reductione problematum indeterminatorum.

^b Vide *Vitruvium*, lib. 9, c. 3.

13. Si ex quæstione utcunque eliciendæ sunt tot æquationes quot habet incognitas quantitates, determinata erit, et solutionem præbebit. Quod si conditionibus deficientibus, pauciores dentur æquationes quam incognitæ quantitates, quæstio indeterminata erit, vel quodam respectu vel absolute; et modò complures, modò innumeras fortietur solutiones. Ut si quærantur duo numeri x et y quorum summa sit 10. Designante x , 9; erit $y = 1$, designante x , 8; erit $y = 2$, &c. et inde novem prodeunt solutiones, si de numeris integris et positivis agatur; innumerae autem, si de fractis vel negativis. Contra, si redundantibus conditionibus, plures habentur æquationes quam incognitæ quantitates, quæstio quasi plusquam determinata evadet, et conclusio erit absurda si inter se discordent conditiones, aut inepta si non. Sic quæsitis duobus numeris quorum summa sit 3, differentia 2, et productum 12. Sint numeri x , et $8 - x$; eritque $x - 2 = 8 - x$. Adeoque $x = 5$, et alter $8 - x = 3$. Sed per tertiam conditionem productum 5×3 seu $15 = 12$ quod absurdum. Et si hæc fuisset conditio ut productum sit 15; inutilis evaderet, quippe quæ ex cæteris pendet, et æquationem identicam seu ineptam $15 = 15$ parit. Atque hoc pacto sane detegentur quæstionum conditiones aut ab invicem pendentes, aut inter se discordantes; ubi scilicet, opere rite instituto, ad æquationem identicam vel absurdam devenitur.

DE DIMENSIONIBUS ÆQUATIONUM.

14. Dimensiones æquationum ad quas in problematis solvendis deventum est, ex maxima dimensione quantitatis incognitæ æstimantur, nullo respectu ad quantitates cognitæ habito, nec ad terminos intermedios. Sic æquatio $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 5 + \frac{1}{5}x + 4 = x$ est simplex seu primi gradus, $140x - x^2 = 3136$ quadratica seu secundi gradus, & sic deinceps. Et si æquatio plures quantitates incognitas fortiat, gradus hujus perinde quoque æstimantur ex

maxima dimensione ejusdem aut plurium quantitatum incognitarum. Sic $xy = 3136$, et $x^2 + y^2 + \frac{xy}{x} = b$ sunt quadraticæ, $xyz + x^2 = a$ cubica, &c. Problema insequens ad æquationes quocunque dimensionum deducet.

15. *Vir quidam nummos a in mercaturam impendit, quum vero hæc non succederet, se expedire cupit sub fine anni primi; at tali occasione non oblata, solvi nequit nisi sub fine anni secundi, aut tertii, aut denique anni n: quo tempore, ex nummis post primi anni jacturam redeuntibus deperit b. Quæritur damnum ejus pro singulis £100 quotannis?*

Sit x damnum quæsitum, et instituendo analogiam, $(100 : 100 - x :: a :) a \times \frac{100 - x}{100}$ five $a \times 1 - \frac{x}{100}$ exponet mercatoris nummos post primi anni jacturam; et continuando analogiam, $(100 : 100 - x :: a \times \frac{100 - x}{100} :) a \times \frac{100 - x}{100}^2$ five $a \times 1 - \frac{x}{100}^2$ nummos post secundi anni jacturam; similiter, $a \times 1 - \frac{x}{100}^3$ nummos post anni tertii jacturam; et in genere, $a \times 1 - \frac{x}{100}^n$ nummos post anni n jacturam. Exponet item $a \times 1 - \frac{x}{100} - b$ mercatoris nummos sub fine anni cujusque post primum. Posito igitur illum a mercatura solvi sub fine anni secundi, æquatio quadratica $a \times 1 - \frac{x}{100}^2 = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, per reductionem dabit x ; sub fine anni tertii, æquatio cubica $a \times 1 - \frac{x}{100}^3 = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$; et sub fine anni n , æquatio n^1 gradus $a \times 1 - \frac{x}{100}^n = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, per resolutionem dabit x .

16. His præfatis de natura et dimensionibus æquationum ad quas problemata deduci debent, instituenda est earum analysis. Trademus itaque modos,

I. Concinnandi æquationes quocunque dimensionum; et reducendi quadraticas, aliasque ordini quadraticarum adscribendas.

II. Ex mediis pluribus in se collatis eliciendi finales æquationes, et reducendi indeterminatas primi et secundi gradus.

III. Resolvendi finales æquationes quocunque dimensionum.

ANALYSIS ÆQUATIONUM.

P A R S P R I M A.

DE CONCINNANDA ÆQUATIONE SOLITARIA.

17. Quoniam quantitates incognitæ quas referunt æquationes cognitæ involvuntur per varios modos additionis vel subtractionis, multiplicationis vel divisionis, involutionis vel evolutionis; necesse est, ut per operationes iis contrarias quibus cum cognitæ implicitæ fuerunt, extricentur et expendantur. De ordinatione & reductione igitur æquationis solitariæ in sequentibus regulis agetur; quæ hoc pendunt principio, quod si quantitatibus quibuscumque sibi mutuo æqualibus addantur vel auferantur æquales, multiplicentur vel dividantur per æquales, involvantur vel evolvantur æqualiter, manebit adhuc quantitarum per has operationes resultantium æqualitas.

18. REG. I. *Termini æquationum secundum dimensiones incognitæ quantitatis in ordinem semper redigendi sunt.* Ita scilicet ut primum occupent locum in quibus incognita quantitas est plurimarum dimensionum, et secundum locum in quibus ea est una dimensione minor, et sic deinceps; ad normam sequentium: in quibus x designat quantitatem quæsitam; p, q, r, s , alias quascunque quantitates ex quibus determinatis et cognitæ etiam x determinatur, et per regulas insequentes erui potest valor ejus si sit unius aut duarum dimensionum, sive maximæ potestatis ejus si plurimum.

$$\begin{array}{ll} x = p, & \text{vel, } x - p = 0, \\ x^2 = px + q, & x^2 - px - q = 0, \\ x^3 = px^2 + qx + r, & x^3 - px^2 - qx - r = 0, \\ x^4 = px^3 + qx^2 + rx + s, & x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s = 0, \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

19. REG. II. *Siquæ sunt quantitates quæ se mutuo destruere, vel per additionem aut subtractionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt.*

Sic § 11, æquatio $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$, addendo partes x et numeros integros respective, prodit $x = \frac{75x}{84} + 9$, et subducendo $\frac{75x}{84}$ utrobique, $\frac{9x}{84} = 9$. Sic $a^2 + x = a^2 + b$, deletâ a^2 per subtractionem, dat $x = b$. Sic quoque $\sqrt{48} = x - \sqrt{75}$, dat $x = \sqrt{48} + \sqrt{75} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Itemque $\sqrt{48a^2bc} - x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2bc}$ dat $x = \sqrt{48a^2bc} - \sqrt{\frac{1}{2}a^2bc} = 4a\sqrt{3bc} - \frac{1}{2}a\sqrt{3bc} = \frac{7}{2}a\sqrt{3bc}$. Ad hanc igitur regulam referri debet ordinatio terminorum æquationis quæ fieri solet per translationem ad partes contrarias cum signo mutato.

20. REG. III. *Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam dividi; vel si per eandem quantitatem omnes dividantur, debent omnes per illam multiplicari.*

Sic $15b^3 = 24ab + 3bx$, dividendo per $3b$ et transponendo, prodit $x = 5b - 8a$. Itemque, $\frac{x}{c} = \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}} = \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}$, multiplicando per c , et transponendo, dat $x = \sqrt{ab^3} + \frac{1}{2}\sqrt{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3} = b\sqrt{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{a - 2b}\sqrt{ab} = \frac{1}{2}a\sqrt{ab}$.

21. Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem. Sic $y^3 = b - 2cy + 3bcy - b^2c$, transferendo omnes terminos ad eandem partem, et dividendo per $y - b$, dat $yy + 2cy - bc = 0$. De inventione hujusmodi divisorum perutili posthac agemus.

22. Hoc pacto tolli possunt fractiones ex æquationibus. Multiplicando scilicet; omnes terminos per uniuscujusque denominatorem. Sic habitâ § 10, æquatione $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$, multiplicando per 27, et transponendo, prodit $10x = 14800$.

23. REG. IV. Si maxima potestas quantitatis incognitæ multiplicetur vel dividatur per cognitam quamlibet quantitatem, debet tota æquatio per eandem dividi vel multiplicari.

Sic æquatio novissima $10x = 14800$, dividendo per 10, dat $x = 1480$, qui utique exponet Mercatoris nummos § 10, ut et lucrum. Itemque æquatio § 19, $\frac{9x}{84} = 9$, dividendo per $\frac{9}{84}$ fit $x = 84$. Vixit igitur Diophantus 84 annos. Et si habeatur $\sqrt{18ab^3} x = 6ab^2$, concinnando prodit $x = \sqrt{\frac{36a^2b^4}{18ab^3}} = \sqrt{2ab}$. Sic § 17, æquatio quadratica $a \times \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, quadrando $1 - \frac{x}{100}$, et ordinando, prodit $x^2 - 100x = -10000 \frac{b}{a}$. Et æquatio cubica $a \times \left(1 - \frac{x}{100}\right)^3 = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, concinnando prodit $x^3 - 300x^2 + 20000x = 1000000 \frac{b}{a}$, et sic deinceps.

24. REG. V. *Siqua sit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur incognita quantitas, omnes æquationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt.*

Sic æquatio $\frac{ax}{a-x} + b = x$, multiplicando per $a - x$ et transponendo prodit $x^2 = bx - ab$. Et $\frac{a^2b^2}{x^2} = \frac{x^2}{a+b-x}$ multiplicando primo per x^2 , deinde per $a + b - x$ evadit $\frac{a^2b^2 + a^2b^2 - a^2b^2x}{x^2} = x^4$.

25. REG. VI. *Sicui surda quantitati irreducibili involvatur quantitas incognita, ceteri omnes termini ad partes contrarias transferendi sunt, et utraque æquationis pars in se semel multiplicanda si radix quadratica sit, vel bis si sit cubica, &c.*

Sic $\sqrt{a^2 - ax} + a = x$ translata a ad alteram partem fit $\sqrt{a^2 - ax} = x - a$, et quadratis partibus, $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$, et concinnando, $x = a$. Sic etiam $\sqrt{3 : a^2x + 2ax^2 - x^3} = a - x$, partibus cubice multiplicatis evadit $a^2x + 2ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$, seu $x^3 = 4ax - a^2$.

26. REG. VII. *Aliquando reductio per extractionem radice ex utraque æquationis parte instituitur.*

Quemadmodum si habeatur æquatio pura $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$, extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Quod si habeatur $x^3 + a^2 = 2ax + b^2$, transfer $2ax$, et exurget quadratum ex una parte perfectum $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$, extractisque partium radicibus, $x - a = b$, seu $x = a + b$. Sic etiam $x^3 - 12x^2 + 48x = 98$, demendo utrinque 64, exhibet cubum ex altera parte perfectum, scilicet; $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 34$, extractisque radicibus cubicis partium, prodit $x - 4 = \sqrt[3]{34}$ five $x = 4 + \sqrt[3]{34}$.

27. Cæterum æquationes ad quas in problematis solvendis devenit, raro puras aut perfectas potestates exhibent ex ista æquationis parte ad quam transferendi sunt termini qui quantitatem incognitam aut ejus dimensiones continent, quales jam posuimus. Formam ut plurimum imperfectam induunt, deficientibus nimirum uno pluribusve terminis qui quadrato, aut cubo, &c. complendo inserviunt, ut

§ 23, æquatio quadratica $x^2 - 100x = -10000 \frac{a}{b}$, et

cubica $x^3 - 300x^2 + 20000x = 1000000 \frac{a}{b}$. Methodum generalem quidem reducendi æquationes hujusmodi quadraticas, quas *adfectas* vocant, (quia præter quadratum incognitæ quantitatis, simplici quoque ejus potestate adfiuntur) jam docebimus; verum methodus generalis resolvendi æquationes altiorum dimensionum per evolutionem, adhuc desideratur.

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM QUADRATICARUM.

28. Si habeatur æquatio pura $x^2 = q$, (ubi q designat quantitatem quamcumque cognitam, five simplex fuerit five composita) extracta utrinque radice prodit $\pm x = \pm \sqrt{q}$, five, si explicetur hæc forma compendiaria, $+x = +\sqrt{q}$, $+x = -\sqrt{q}$, $-x = +\sqrt{q}$, vel $-x = -\sqrt{q}$. At ex his quatuor valoribus x , tertius transponendo revocatur ad secundum, et quartus ad primum; sufficit igitur si affirmative tantum ponatur x , et bini statuuntur valores ejus, scilicet; $+\sqrt{q}$ vel $-\sqrt{q}$. Quod in sequentibus quoque observandum. Incognitam vero quantitatem x , extracta radice quadraticâ duplicem fortiri valorem, æquum est; quoniam enim quantitatis five affirmativæ five negativæ quadratum est semper affirmativum, e converso, quadrati affirmativi radix potest esse

affirmativa vel negativa. 2^{do}. Sit $x^2 = -q$, uterque valor x , scilicet; $+\sqrt{-q}$, vel $-\sqrt{-q}$ prodit impossibilis; cum quadrati negativi genesis sit impossibilis.

Hinc in æquatione quadratica pura, binæ existunt radices, seu bini valores quantitatis incognitæ, quæ evadent simul reales si q sit affirmativa, et simul impossibiles si q sit negativa.

29. Quod si habeatur æquatio adfecta $x^2 + px = q$, (designantibus p et q quantitates quascunque cognitæ) constat, membrum $x^2 + px$, a parte sinistra æquationis, imperfectum exhibere quadratum binomiæ $x + \frac{1}{2}p$; quæ utique quadrando parit $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$. Utrunque igitur, a parte sinistra ad complendum quadratum, et a parte dextra ad servandam membrorum æqualitatem addatur $\frac{1}{4}p^2$, (quarta pars quadrati coefficientis secundi termini,) et prodibit $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$, et extracta utrinque radice, $x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, et transponendo, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$. Et sic universaliter: Si sit $x^2 = .px . q$, erit $x = .\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 . q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem signis ac p & q in æquatione priore afficienda sunt, sed $\frac{1}{4}p^2$ semper affirmative ponendum. Estque hoc exemplum Regula ad cuius similitudinem æquationes omnes quadraticæ adfectæ ad formam simplicium reduci possunt.

30. Hinc, variantibus signis p et q , quatuor prodeunt quadraticarum formulæ^b. Scilicet,

^a Hæc methodus complendi quadratum in speciebus ad quadraticarum reductionem, extat in opere primi scriptoris algebraici *Luca de Burgo*, cui titulus *Summa de Arithmetica et Geometria*, impresso, Anno 1494, atque iterum Anno 1523. Hic tres formulas priores insequentibus versibus semibarbaris exposuit: in quibus *res* et *radix* designant px ; *census*, x^2 ; *numerus* et *drachma*, q .

$$\text{I. } x^2 + px = +q \text{ adeoque } x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} \text{ vel, } = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$$

$$\text{II. } x^2 - px = +q \quad - \quad x = +\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} \quad - \quad = +\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$$

$$\text{III. } x^2 - px = -q \quad - \quad x = +\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \quad - \quad = +\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

$$\text{IV. } x^2 - px = -q \quad - \quad x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \quad - \quad = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

In formulis I. et II, ubi quantitas absoluta q est affirmativa, erit $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ major quam $(\sqrt{\frac{1}{4}p^2} =) \frac{1}{2}p$, et proinde radix prior in utraque erit affirmativa, et posterior negativa.

In formulis III et IV, ubi q est negativa, si sit *minor* quam $\frac{1}{4}p^2$, erit $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ affirmativa, et minor quam $\frac{1}{2}p$; et proinde in III, evadet utraque radix affirmativa, in IV, utraque negativa. Si sit *æqualis* $\frac{1}{4}p^2$, evanescet $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, et binæ radices in utraque evadent æquales, seu coalescent in unam. Et si q sit *major* quam $\frac{1}{4}p^2$, erit $\frac{1}{4}p^2 - q$ negativa, et $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ impossibilis; et proinde binæ radices in utraque formula evadent impossibiles, quoniam hæc quantitas impossibilis earum compositionem ingreditur.

1. Si res & census numero coquantur, a rebus
Dimidio sumpto, censum producere debes
Addereque numero, cujus a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

$$px + x^2 = q.$$

2. Et si cum rebus drachmæ quadrato pares sunt,
Adde, sicut primo, numerum productio quadrato
E rebus mediis, hujusque radice recepta,
Si rebus mediis addes census patefiet.

$$q + px = x^2.$$

3. At si cum numero radices census æquabit,
Drachmas a quadrato deme rei medietatis;
Hujus quod superit radicem adde trahere
A rebus mediis sic census colla notescet.

$$x^2 + q = px.$$

Quartam formulam non admiserunt vetustiores, utpote quæ ambo valores x parit negativos, ut mox videbitur, negativos autem valores pro falsis habuerunt.

Hinc quoque in omni æquatione quadraticâ affectâ, binæ existunt radices seu valores quantitatis incognitæ, quæ evadent simul reales, ubi q sit affirmativa, aut ubi sit negativa et non major saltem quam $\frac{1}{4}p^2$; nam si major, evadent simul impossibiles.

DE RADICIBUS ÆQUATIONUM QUADRATICARUM.

31. Ex radicibus seu valoribus quantitatis incognitæ realibus, affirmativi designant in genere quantitates *additivas*, negativi *ablativas*. In quæstionibus profecto solvendis quæ circa abstractas quantitates versantur, ubi nulla sit rerum contrarietas, negliguntur negativi valores quasi inutiles, et affirmativis tantum locus conceditur. Atque hinc quidem ablegabant Algebristæ vetustiores (necnon ablegant etiamnum nonnulli hujusce ævi) radices negativas secundæ et tertiæ formulæ, et quartam omnino formulam. Verùm in mixta Mathesi, ubi oppositio quædam inter quantitates de quibus agitur, incidere potest, velut in motu locali inter progressum et regressum, in rebus humanis inter bona et debita, in physicis inter attractionem et repulsionem, jure admittendæ sunt, utpote quæ ad casus quæstionum datis contrarios respiciunt. Negativarum naturam primus perspexisse videtur acutissimus *Cartesius*, qui primus harum usum in analysin & geometriam introduxit.

32. Ex binis radicibus affirmativis tertiæ formulæ, haud raro contingit quod una tantum quæstioni unde elicitur solvendæ respondet; nam quadratum $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$ ambigue pariet radix $x - \frac{1}{2}p$ vel $\frac{1}{2}p - x$, prout x sit major vel minor quam $\frac{1}{2}p$. Unde ex binis valoribus per extractionem prodeuntibus major, scilicet $\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ designabit x in priore casu, minor $\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ in posteriore.

Cæterum in quæstione ad hujusmodi æquationem perducente, sæpe ex professore vel tacite, definitur quanta sit x respectu p .

33. Radices impossibiles propriè nec sunt affirmativæ neque negativæ; licet sub utraque forma delitescunt. Indicant profecto, quæstiones unde nascuntur solutionem prorsus respuere. Et dari quidem radices sæpe impossibiles æquum est, ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeant possibiles.

Hæc omnia de quadraticis abstracte jam posita, ex problematum insequentium solutione luculentius patebunt.

P R O B. I.

34. *Vir quidam nummos a in mercaturam impendit, quum vero hæc non succederet, se expedire cupit sub fine anni primi; at occasione non oblata, solvi nequit nisi sub fine anni secundi: quo tempore, ex nummis post primi anni jacturam redeuntibus deperit b . Quæritur damnum ejus pro singulis £100 quotannis.*

Designante x damnum quæsitum, deventum erat § 15, ad æquationem $a \times 1 - \frac{x}{100} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, quæ concinnando prodit $x^2 - 100x = -10000 \frac{b}{a}$. Et complendo quadratum, secundum Regulam § 29, erit $x^2 - 100x + 2500 = 2500 - 10000 \frac{b}{a} = 2500 \times 1 - \frac{4b}{a}$. et extracta radice quadratica, $x - 50 = \pm 50 \sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$. adeoque $x = 50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

EXEMPL. 1^{mo}. Sit b ad a in ratione 1 ad 4; seu 6 ad 25;
erit $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$ et $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}} = \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = \frac{1}{5}$. Adeoque $x = 50 \pm$

$50 \times \frac{1}{5} = 60$ vel 40. Ex his vero uterque quæstionem solvet.
Nam si sumatur $x = 60$ per cent. posito quod a sit £100000,
secundum proportionem allatam debet esse $b = £24000$.
Cæterum mercatoris damnum sub fine anni primi prodit
£60000, residuum igitur sit £40000: ex quo b seu dam-
num sub fine anni secundi, prodit £24000, ut æquum est.
Et si $x = 40$ per cent. erit damnum sub fine anni primi £40000
et residuum £60000: adeoque $b = £24000$, ut antea.
2^{do}. Sit b ad a in ratione 1 ad 4; evanescente jam ± 50

$\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$ prodit unicus valor x , scil; 50, qui quæstioni
solvendæ respondet; ut constat. 3^{uo}. Sit b ad a in ra-
tione 1 ad 3; prodibit $x = 50 \pm 50 \sqrt{-\frac{1}{3}}$, uterque scil;
valor x impossibilis. Quod indicio est hunc quæstionis
casum neutiquam esse solvendum.

P R O B. II.

35. *Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis fundum
percutientis, altitudinem putei cognoscere.*

Sit altitudo putei x , et si lapis (neglectâ aeris resistentiâ)
motu uniformiter accelerato descendat per spatium quodli-
bet datum a (puta 16,122 pedum,) in tempore dato b
(unius scil; minuti secundi,) et sonus, (cum percurrit 1142
pedes in tempore unius minuti secundi motu uniformi)
transeat per idem datum spatium a in tempore dato d ;
lapis descendet per spatium x in tempore $\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, (nam ob
tempora descensus gravium ut radices spatiorum, erit hoc
tempus ad tempus datum b ut $\sqrt{x}$ ad $\sqrt{a}$,) sonus autem

qui fit a lapide in fundum putei impingente ascendet per idem spatium x in tempore $\frac{dx}{a}$. (Erit enim hoc tempus ad tempus datum d , ob motum soni uniformem, ut spatium x ad spatium a .) Ex horum temporum summa, conflatur tempus a lapide demisso ad soni reditum. Hoc tempus ex

observatione cognosci potest: fit ipsum t , et erit $\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis, $\frac{b^2 x}{a} = t^2 - \frac{2t dx}{a} + \frac{d^2 x^2}{a^2}$. Et concinnando $x^2 = \frac{2adt + ab^2}{d^2} x - \frac{a^2 t^2}{d^2}$.

Et inde ope formulæ III, conferendo $\frac{2adt + ab^2}{d^2}$ cum p , et $\frac{a^2 t^2}{d^2}$

cum q ; evadet $\frac{1}{2}p^2 = \frac{2adt + ab^2}{2d^2}$. $\frac{1}{2}p^2 - q = \frac{4a^2 d^2 t^2 + 4a^2 b^2 dt + a^2 b^4}{4d^4}$

$-\frac{a^2 t^2}{d^2} = \frac{4a^2 d^2 t^2 + 4a^2 b^2 dt + a^2 b^4 - 4a^2 d^2 t^2}{4d^4} = \frac{4a^2 b^2 dt + a^2 b^4}{4d^4} = \frac{a^2 b^2}{4d^4}$

$\times \sqrt{b^2 + 4dt}$. Et $\sqrt{\frac{1}{2}p^2 - q} = \frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt}$. Adeoque $x = \frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2}$

$\pm \frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt}$. Cæterum altitudo putei x duplex effe

nequit, hanc igitur exponet minor radix seu valor x , scilicet $\frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} - \frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt}$. Nam tempora $\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$ et $\frac{dx}{a}$

ex hypothesi simul conficiunt t ; tempus observatione com-

pertum, erit igitur tempus $\frac{dx}{a}$ seorsim minus quam t , five

x minor quam $\frac{at}{d}$; quod in hoc casu ita se habet. Liquet enim $\sqrt{b^2 + 4dt}$ esse majorem quam b ; finge æqualem $b + c$,

eritque $x = \frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} - \frac{\frac{1}{2}ab}{d^2} \frac{b+c}{b+c} = \frac{adt + \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{2}abc}{d^2}$

$= \frac{adt - \frac{1}{2}abc}{d^2}$ et proinde x minor quam $\frac{adt}{d^2} = \frac{at}{d}$

36. EXEMPL. Sit tempus observatione compertum a lapide demisso ad soni reditum, quinque minutorum secundorum, seu $t = 5''$. Adeoque, cum $a = \text{ped. } 16,122$. $b = 1''$. et d propter analogiam $= ,014117''$. (nam $\text{ped. } 1142 : \text{ped. } 16,122 :: 1'' : ,014117''$) evadet $adt = 16,122 \times 5 \times ,014117 = 1,13797137$. $\frac{1}{2}ab^2 = 8,061$. et $\frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} = 46158,79$. Erit quoque $b^2 + 4dt = 1,28234$. $\sqrt{b^2 + 4dt} = 1,1324$. $\frac{ab}{2d^2} = 40448,6556$. $\frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt} = 45804,057$. Et proinde, $\frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} - \frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt} = 354,733 \text{ ped.}$

Altitudinem putei recte statui ped. 354,733. sic probare licet. Tempora $b \sqrt{\frac{x}{a}}$ et $\frac{dx}{a}$ per hypothesin simul æquari debent t sive quinque minutis secundis. Sed $x = 354,733$. $\frac{x}{a} = 22,0030$. et $\sqrt{\frac{x}{a}}$ id est, $b \sqrt{\frac{x}{a}} = 4,69''$. Est quoque $dx = 5,00776$. et $\frac{dx}{a} = ,31''$. Et proinde $b \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = 4,69'' + ,31'' = 5''$.

37. Alter valor x , scilicet $\frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} + \frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt}$ alio satisfacit problematis casui; cujus ea est conditio ut tempus observatione compertum sit excessus temporis quo ascendit sonus supra tempus quo decidit lapis, seu $\frac{dx}{a} - b \sqrt{\frac{x}{a}} = t$. nam hæc æquatio, transponendo et quadrando dabit $\frac{b^2 x}{a} = t^2 - \frac{2dtx}{a} + \frac{d^2 x^2}{a^2}$ ut antea. Adeoque per reductionem $x = \frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} + \frac{ab}{2d^2} \sqrt{b^2 + 4dt}$.

38. In problematum physicorum resolutione observandum est, quod conclusionum algebraicè elicitarum auctoritas, pendet ex principiorum physicorum quibus inniuntur certitudine et accurate, tum ex ipsorum experimentorum fide. Sic in hac solutione minus accurata prodit conclusio, 1^{mo}. ex eo quod negligitur aeris resistentia, quâ gravia cadendo notabiliter retardantur; 2^{do}. quod valores a et d vix forsan accurate determinandi sunt; et 3^{tio}. quod in ipsum t parvus error, unius semisecundi saltem, irreperere potest; verùm hoc errorem haud contemnendum in conclusionem inducet.

P R O B. III.

39. *Invenire punctum æqualis attractionis inter duos planetas situm, quorum innotescit distantia ab invicem, et ratio massarum.*

Sit d distantia lunæ a tellure, x distantia puncti quæsiti a luna, erit hujus distantia a tellure $d - x$. Et quoniam harum attractiones quibuscunque distantis sunt ut massæ t et l directe, et quadrata distantiarum inverse; erit attractio telluris ut $\frac{t}{(d-x)^2}$, lunæ autem ut $\frac{l}{x^2}$. Adeoque hic posita attractionum æqualitate, erit $\frac{t}{(d-x)^2} = \frac{l}{x^2}$. et concinnando, $x^2 + \frac{2dl}{t-l} x = \frac{d^2 l}{t-l}$. Et collatis hujus terminis cum formula I. erit $\frac{1}{2}p = \frac{dl}{t-l}$. $\frac{1}{2}p^2 + q = \frac{d^2 l^2}{(t-l)^2} + \frac{d^2 l}{t-l}$
 $= \frac{d^2 l t}{(t-l)^2} = \frac{d^2}{(t-l)^2} \times lt$. Et $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} = \frac{d}{t-l} \sqrt{lt}$. Adde-
 que $x = \frac{-dl + d\sqrt{lt}}{t-l}$.

Horum valorum x , affirmativus $\frac{-dl + d\sqrt{t}}{t-l}$ quæstionem solvet: negativus vero $\frac{-dl - d\sqrt{t}}{t-l}$ ad alterum quoddam punctum æqualis attractionis ultra lunam situm respicit; ut ex eo constat, quod si quærat^r alterum punctum istud, distantis jam designatis per x et $d+x$, habebitur æquatio $\frac{t}{(d+x)^2} = \frac{l}{x^2}$. Et per reductionem, $x = \frac{dl + d\sqrt{t}}{t-l}$. idem scilicet geminus valor x ut antea, at contrariis signis affectus: quorum affirmativus hunc casum solvet, negativus ad priorem refertur.

40. Et quidem binos valores x in utroque casu diversa fortiri signa æquum est, quum duo hæc puncta æqualis attractionis ad plagas *lunæ oppositas* fistantur. Verum posito quod x sit distantia puncti quæsitⁱ a tellure, erit $d-x$ distantia ejusdem a luna. Adeoque $\frac{t}{x^2} = \frac{l}{(d-x)^2}$ unde per reductionem, prodit $x = \frac{dt + d\sqrt{t}}{t-l}$. uterque jam valor x affirmativus, ut oportet; quum ad *eandem* plagam, respectu *telluris*, bina attractionis æqualis puncta fistantur. Hinc liquet, quod quantitates affirmativæ et negativæ, conceptibus nostris tantum discrepantes, in rerum naturâ æque reales sunt habendæ. Ex his autem valoribus, minor $\frac{dt - d\sqrt{t}}{t-l}$ quæstionem solvet. Sit enim $d = 60$ semidiamentris telluris, et t ad l in ratione 40 ad 1 circiter; evadet distantia puncti quæsitⁱ a tellure, $= \frac{2400 - 379,464}{39} = 51,8$ seu 52 semidiam. telluris fere, et distantia alterius puncti prodibit $\frac{2400 + 379,464}{39} = 72$ semidiam. fere.

41. Reductio æquationis $\frac{l}{x^2} = \frac{l}{(d-x)^2}$ aliter institui potest.

Nam extracta radice quadratica erit $\frac{\sqrt{l}}{x} = \frac{\pm\sqrt{l}}{d-x}$. Et concinnando, $x = \frac{\pm d\sqrt{l}}{\sqrt{l} \pm \sqrt{l}}$. seu multiplicando numeratorem et denominatorem per $\sqrt{l} - \sqrt{l}$, prodit x ut antea $= \frac{d\sqrt{l}}{l-1}$.

P R O B. IV.

42. *Rectam datam in extrema et media proportionem secare.*

Sit rectæ datæ a segmentum majus x , erit segmentum minus $a - x$, adeoque per quæstionem, $x^2 = a \times a - x = -ax + a^2$. Et per reductionem, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Alter valor x qui prodit negativus, scilicet; $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ diverso problematis casui respondet, nempe, *Rectam datam in extrema et media proportionem producere*. Hoc est, ita ut quadratum augmenti x sit æquale rectangulo sub a et $a + x$ contento; five $x^2 = ax + a^2$. Quæ per reductionem dabit eosdem valores x , at contrariis signis affectos: ex his autem, $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ hunc quæstionis casum solvet.

P R O B. V.

43. *Mercatores A et B pro mercibus per annum venundatis, eandem summam £2112 recipiunt; verum A lucrando 2 per cent. plus quam B, nummos suos adauget incremento £100 per annum plus quam B. Quæritur utriusque lucrum per cent. et totum utriusque lucrum per annum.*

Sit x lucrum *per cent.* mercatoris A , eritque propter analogiam, (ut. $100+x$, reditus pro $\text{£}100$ impensis, ad x ; ita. 2112 , reditus totus *per annum* ad) $\frac{2112x}{100+x}$ totum lucrum mercatoris A *per annum*. Et similiter, $(98+x : x-2 :: 2112 :)$ $\frac{2112x-4224}{98+x}$ totum lucrum B *per annum*. Adeoque per quæstionem, $\frac{2112x}{100+x} - \frac{2112x-4224}{98+x} = 100$. Et concinnando, $x^2 = -198x - 5576$. Et per reductionem, $x = -99 \pm 65$. Prodeunte igitur utroque valore negativo, colligere licet x in hoc casu designare non lucrum sed damnum, et quæstionem aliter esse efferendam. Scilicet,

44. *Mercatores A et B pro mercibus, &c. eandem summam £2112 recipiunt. Verum A, amittendo 2 per cent. minus quam B, amittit £100 per annum minus quam B. Quæritur utriusque damnum per cent. et totum utriusque damnum per annum.*

Designante jam x damnum *per cent.* mercatoris A , erit $(100-x : x :: 2112 :)$ $\frac{2112x}{100-x}$ totum damnum A *per annum*. Et similiter, $(98-x : x+2 :: 2112 :)$ $\frac{2112x+4224}{98-x}$ totum damnum B *per annum*. Sed per quæstionem, $\frac{2112x}{100-x} - \frac{2112x+4224}{98-x} = 100$. Et concinnando, $x^2 = 198x - 5576$. Et per reductionem, $x = 99 \pm 65$. Horum valorum x affirmative jam prodeuntium, minor scilicet; $99-65=34$, quæstionem solvet. Erit enim damnum A , $\text{£}34$ *per cent.* et totum damnum ejus *per annum* $\frac{2112 \times 34}{66} = \text{£}1088$. Eritque damnum B , $\text{£}36$ *per cent.* et totum ejus damnum *per annum* $\frac{2112 \times 34 + 4224}{64} = \text{£}1188$.

Alter valor x , scil; $99 + 65 = 164$, utpote major quam 100, damnum pro singulis £100 impensis designare nequit, verum casui insequenti solvendo respondet.

45. Mercatorum A et B lucrum per annum nummos ab utroque in mercaturam impensis excedit summâ £2112. At A quum lucratus sit 2 per cent. minus quam B, lucratur £100 per annum plus quam B. Quæritur utriusque lucrum per cent. et totum utriusque lucrum per annum.

Designante x lucrum per cent. mercatoris A, erit,
 $(x - 100 : x :: 2112 :) \frac{2112x}{x-100}$ totum lucrum A per annum.

Et similiter, $x - 98 : x + 2 :: 2112 :) \frac{2112x + 4224}{x-98}$ totum lucrum B per annum. Sed per quæstionem, $\frac{2112x}{x-100} -$

$\frac{2112x + 4224}{x-98} = 100$. Et concinnando, $x^2 = 198x - 5576$, ut

antea. Adeoque per reductionem, $x = 164$. Erit igitur lucrum A per cent. £164, et totum lucrum ejus per annum

$\frac{2112 \times 164}{64} = £5412$. Et lucrum B per cent. £166, et totum

lucrum ejus per annum $\frac{2112 \times 164 + 4224}{66} = £5312$.

P R O B. VI.

46. Numerum 10 ita in duas partes dividere, ut productum ex partibus in se ductis conficiat 30.

Sit x una pars, alteram designabit $10 - x$, eritque
 $x \times 10 - x = 30$, et per reductionem, $x = 5 \pm \sqrt{-5}$. U-

terque igitur prodit valor x impossibilis: et jure quidem, nam conditio ut factum sub partibus conficiat 30, est impossibilis, cum factum maximum (ubi scilicet partes inter se æquantur) sit 25.

Designante enim in genere d dimidium quantitatis datæ, fit una pars $d + y$, alteram designabit $d - y$. Sed harum productum $d + y \times d - y = d^2 - y^2$ fit maximum, ut constat, ubi evanescente y^2 designatur tantum per d^2 . Quod ex *Euclid. lib. 2, prop. 5*, quoque constat.

47. Hoc problema (et similia) versione in sermonem Algebraicum paulum immutatâ, ad puram quadraticam facile redigere licet. Sit enim pars major $5 + y$, minorem designabit $5 - y$. Adeoque erit $5 + y \times 5 - y = 30$. Sive, $25 - y^2 = 30$. Adeoque $y^2 = -5$. Seu $y = \pm \sqrt{-5}$ uterque valor impossibilis ut antea.

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM QUÆ ORDINI QUADRATICARUM ADSCRIBENDÆ SUNT.

48. Æquationes parium dimensionum formæ $x^{2n} = .px^n . q$. (ubi duos tantum terminos ingreditur incognita quantitas, et index termini altissimi fit duplus secundi) juxta legem quadraticarum, ad puras dimensionis dimidiatæ sunt depressendæ; quas postea, si index n sit integer per evolutionem, si fractus per involutionem resolvere licet. Nam $x^{2n} = .px^n . q$ extracta radice quadratica, prodit $x^n = .\frac{1}{2}p$

$\pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 . q}$ adeoque, $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 . q}}$. Problemata sequentia hujusmodi æquationes pariunt.

P R O B. I.

49. *Invenire duos numeros quorum productum sit 100, et differentia radicum quadraticarum 3.*

Sit minor x , majorem designabit $\frac{100}{x}$. Adeoque erit $\frac{10}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 3$. five concinnando, $x = -3\sqrt{x} + 10$. et per reductionem, $\sqrt{x} = \frac{-3 \pm 7}{2} = 2$ vel -5 . Et per involutionem, $x = 4$ vel 25 . Erit itaque x in hoc casu 4, et alter numerus 25: aut vice versa, si statuatur x major numerus.

P R O B. II.

50. *Invenire duos numeros quorum productum sit 1, et summa quadratorum 6.*

Designante x unum numerum, alterum designabit $\frac{1}{x}$. Adeoque erit $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Seu concinnando, $x^4 = 6x^2 - 1$. Et per reductionem, $x^2 = 3 \pm \sqrt{8}$. Et radice extractâ, $x = \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{8}}$. Quadruplex nimirum prodit valor x , scil. $+\sqrt{3+\sqrt{8}}$, $+\sqrt{3-\sqrt{8}}$, $-\sqrt{3+\sqrt{8}}$, vel $-\sqrt{3-\sqrt{8}}$ ex quibus duo posteriores, cum sint iidem ac priores sed contrariis signis affecti, ut plurimum negliguntur. Quod in sequentibus quoque observandum. Ex valoribus autem

receptis uterque solvet problema. Nam $\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{5,828}$
 $= 2,414$. Adeoque, erit $x^2 = 5,828$. $\frac{1}{x^2} = 0,171$. Et ho-
 rum summa prodit 5,999, seu 6 quamproxime. Sic quo-
 que alter valor x , $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ problema solvet quamproxime.

P. R. O. B. III.

51. *Invenire duos numeros, quorum quadrata simul conficiant*
 $8\sqrt{2}$, *et quadratorum productum sit 8.*

Sit x^2 quadratum unius numeri, erit $8\sqrt{2} - x^2$ quadra-
 tum alterius, adeoque $x^2 \times 8\sqrt{2} - x^2 = 8$. Seu concin-
 nando, $x^4 = 8\sqrt{2} x^2 - 8$. Et per reductionem, $x^2 = \sqrt{32}$
 $\pm \sqrt{24}$. Et radice iterum extracta, $x = \sqrt{\sqrt{32} \pm \sqrt{24}}$.

Haud secus in speciebus, $x^4 = (2gb + 4f^2) x^2 - g^2 b^2$
 per reductionem, prodit $x^2 = gb + 2f^2 \pm \sqrt{4f^2 gb + 4f^4}$.
 Et extracta radice, $x = \sqrt{gb + 2f^2 \pm 2f\sqrt{gb + f^2}}$.

Aliquando radices quadraticæ hujusmodi quantitatum
 ex radicalibus aut ex integris et radicalibus ad invicem in-
 commensurabilibus compositarum, accurate designari pos-
 sunt per simpliciores quantitates radicales; ope regulæ in-
 sequentis, quam ex Bombellio expressit Newtonus.

52. *Designet A quantitatis alicujus partem majorem, B par-*
tem minorem: et erit $\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$ *quadratum majoris partis ra-*
dicis; & $\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem*
majori adnectenda est cum signo ipsius B. Adeoque $\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}$
 $\pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}$ *radix quæsitæ.*

Sit enim $y + 2\sqrt{yz} + z$ quantitas aliqua cujus radix $\sqrt{y} + \sqrt{z}$ extrahenda est. Designet A partem ejus majorem $y + z$, et B partem minorem $2\sqrt{yz}$, quo $\sqrt{A^2 - B^2}$ fit possibilis. Quadrando, erit $y^2 + 2yz + z^2 = A^2$, et $4yz = B^2$. Et subducendo posteriorem, $y^2 - 2yz + z^2 = A^2 - B^2$. Et extracta radice, $y - z = \sqrt{A^2 - B^2}$. Adeoque, $y + z + y - z$ seu $2y = A + \sqrt{A^2 - B^2}$ et $y = \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$. Itemque $y + z - y - z$ seu $2z = A - \sqrt{A^2 - B^2}$ et $z = \frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}$. Adeoque $\sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}$.

Ut si quantitatis $3 + \sqrt{8}$ radix extrahenda est, scribe 3 pro A et $\sqrt{8}$ pro B , eritque $\sqrt{A^2 - B^2} = 1$. Et quadrata partium radices simul, scil. $\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2} = 2 + 1$. Ergo radix est $1 + \sqrt{2}$. Hæc enim quadrando dabit $1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8}$. Eodem modo si de $2f^2 + gb + 2f\sqrt{f^2 + gb}$ radix extrahi debet, scribendo $2f^2 + gb$ pro A , et $2f\sqrt{f^2 + gb}$ pro B , erit $\sqrt{A^2 - B^2} = gb$; adeoque $\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = f^2 + gb$ et $\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = f^2$. Ergo radix ipsa $f + \sqrt{f^2 + gb}$. Haud secus, si de quantitate impossibili $1 + 4\sqrt{-3}$ radix sit extrahenda, posito $A = 1$, $B = 4\sqrt{-3}$, et $B^2 = -48$, erit $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{1 + 48} = 7$.

^a Sit quantitatis alicujus dimidium d , et pars major $d + x$, erit pars minor $d - x$. Sed rectangulum sub partibus $d + x$ et $d - x = d^2 - x^2$. et bis rectangulum $2d^2 - 2x^2$, fit minus quam $d + x^2 + d - x^2 = 2d^2 + 2x^2$ quadrata partium simul. Quod ex *Eulid. Lib. 2, prop. 4 et 5* quoque colligere licet.

Et quadrata partium radices, $= \frac{1+7}{2} \pm \frac{1-7}{2} = 4 \pm 3$.

Ergo, radix ipsa $2 \pm \sqrt{-3}$. Rursus, si habeatur $2\sqrt{-1}$, posito $A = 0$, $B = 2\sqrt{-1}$, $B^2 = -4$, erit $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{0+4}$

$= 0+2$. Adeoque radix $= \frac{\sqrt{0+0+2}}{2} + \frac{\sqrt{0-0-2}}{2} = 1 +$

$\sqrt{-1}$. Porro, si ex $\sqrt{32} \pm \sqrt{24}$ ex radicalibus solis conflata, radix extrahenda sit; ponendo $\sqrt{32}$ pro A , et $\sqrt{24}$ pro B , erit $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{8}$, et inde quadratum majoris

partis radices $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{8} + \sqrt{8}}{2} = \frac{3\sqrt{8}}{2} = 3\sqrt{2}$

$= \sqrt{18}$. Et quadratum minoris, $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. Radix

itaque est $\sqrt{18} \pm \sqrt{2}$. Denique, si habeatur $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12}$

$- \sqrt{24}$, ponendo $6 + \sqrt{8} = A$ et $-\sqrt{12} - \sqrt{24} = B$, fiet

$A^2 = 44 + 12\sqrt{8}$, $B^2 = 36 + 2\sqrt{288} = 36 + 12\sqrt{8}$, et

$\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{8}$, unde quadratum majoris partis radices erit

$\frac{6+2\sqrt{8}}{2} = 3 + \sqrt{8}$, atque illud minoris $= 3$, adeoque ra-

dicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$, hoc est ut supra $1 + \sqrt{2}$; et pars

minor $\sqrt{3}$. Et proinde radix ipsa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

53. Cæterum ubi plures sunt hujusmodi termini radicales ad invicem incommensurabiles, excogitavit sagacissimus Newtonus methodum citius inveniendi partes radices; dividendo scilicet factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem quæ producit quotum rationalem et integrum, donec tot eruantur hujusmodi quoti diversi quot sunt partes radices quæsitæ. Nam dimidii quoti cujusque radix erit pars radices.

Nam si tres habeantur hujusmodi radicales, sit radix quæsitæ, $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, quadrando erit $x + y + z \pm 2$

$\sqrt{xy} \pm 2\sqrt{xz} \pm 2\sqrt{yz} = A \pm B$. At trium rectangulorum unoquoque duas radices partes continente, si dividatur factum duorum quorumvis, tres utique radices partes comprehendendum, per tertium, duas itidem radices partes continens, quotiens unam radices partem involvet: scil. $\frac{2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{xz}}{2\sqrt{yz}} = 2x$, $\frac{2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{yz}}{2\sqrt{xz}} = 2y$, et $\frac{2\sqrt{xz} \times 2\sqrt{yz}}{2\sqrt{xy}} = 2z$. Ergo radix dimidii cujusque quoti erit pars radices quæsitæ. Sic, in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$. Ergo partes radices sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. ut supra.

Ad signa partium quod attinet, quoniam factum partium duarum signis similibus utentium erit affirmativum, secus vero negativum: erunt partes radices 1 et $\sqrt{2}$ quas continet prima radicalis $+\sqrt{8} (= 2\sqrt{xy})$ ambæ affirmativæ, vel ambæ negativæ; secundæ autem radicalis $-\sqrt{12} (= -2\sqrt{xz})$ partes, scil. 1 et $\sqrt{3}$ contrariis affici debent signis. Radix igitur erit vel $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, vel $-1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

54. Si quatuor sint hujusmodi radicales, sit radix $\sqrt{v} \pm \sqrt{x} + \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$. quadrando erit $v + x + y + z \pm 2\sqrt{vx} \pm 2\sqrt{vy} \pm 2\sqrt{vz}; \pm 2\sqrt{xy} \pm 2\sqrt{xz}; \pm 2\sqrt{yz} = A \pm B$. ex 15 autem diversis horum rectangulorum combinationibus quas instituere licet, tripliciter erui potest quæque radices pars, unde duodecim prodibunt quoti rationales et integri: scil. $\frac{2\sqrt{vx} \times 2\sqrt{vy}}{2\sqrt{xy}}$, vel $\frac{2\sqrt{vx} \times 2\sqrt{vz}}{2\sqrt{xz}}$, vel $\frac{2\sqrt{vy} \times 2\sqrt{vz}}{2\sqrt{yz}} = 2v$; $\frac{2\sqrt{vy} \times 2\sqrt{xy}}{2\sqrt{vx}}$ vel &c. $= 2x$; et sic deinceps. Tres autem qui supersunt quoti evadent irrationales, quum facta jam restantia, scil.; $2\sqrt{vx} \times 2\sqrt{yz}$, $2\sqrt{vy} \times 2\sqrt{xz}$, et $2\sqrt{vz} \times 2\sqrt{xy}$.

utpote quæ omnes radicis partes continent, divisorem inter reliqua rectangula nullum sortientur qui quotum rationalem & integrum pariet.

55. Ex dictis colligere licet, quod radices hujusmodi quantitatum vel ex integris et radicalibus; vel ex radicalibus solis compositarum ope regulæ præfatæ quidem extrahere fas erit, ubi $\sqrt{A^2 - B^2}$ exhibeat quantitatem rationalem et integram, vel si non, ubi radicales quas exhibent A et $\sqrt{A^2 - B^2}$ extrahendo quicquid est rationale, ex parte radicali conveniant.

Huic parti, *Appendicem* subjungam de celeberrimo *Theoremate Binomio*, cujus usus tam in involuptione et evolutione, quam in omni fere *Analyseos* parte egregius.

DE THEOREMATE BINOMIO.

56. Præclarum hoc theorema, quod tentando & inductione extudit *Newtonus*, non nisi anno 1676 epistolis ad *Oldenburg* missis, cum *Leibnitio* communicandis, patefecit; licet hoc unâ cum præcipuis suis inventis analyticis, saltem ante pestem *Londinensem* anno 1665 ingruentem, ei innotuisse ex istis constat. Suspiciabatur nimirum vir egregius, haud minus modestiâ quam ingenio insignis, inventa hæc sua, aut aliis perspecta jam esse, aut saltem fore, prius quam ipse ætatem scribendo parem attigerit*. Natus est *Newtonus* anno 1642.

57. Theorema Binomium ita profertur,

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times \left(1 + \frac{m}{n}Q + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} Q^2 + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} Q^3 \&c. \right)$$

Sive, secundum formulam *Newtonianam*,

$$= P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ \&c.$$

* — "About that time the plague breaking out, obliged me to get hence [from Cambridge] and think of something else. Notwithstanding, I added to my other discoveries at that time, a certain construction of Logarithms deduced from the Area of the Hyperbola. — I am ashamed to tell to how many places of figures I carried these computations, having no other business at that time; for I pleased myself too much with these discoveries. But as soon as that ingenious performance of *Nicolaus Mercator* appeared [in the year 1668] I mean his *Logarithmotechnia*, (who, I doubt not, first discovered the things he published,) I began to cool a little upon those things, suspecting that either he understood the extraction of roots as well as division of fractions; or at least, that others, upon the discovery of division, would find out the rest, before I could be of a sufficient age for writing." See his Letters to *Oldenburg*, *Commerc. Epistol.* N° 48 and 55; or *Stewart's Quadrature of Curves*, &c. p. 357.

Ubi $P + PQ$ designat quantitatem quamlibet compositam, five binomiam five polynomiam, cujus radix quævis, dimensio quævis, vel radix dimensionis investiganda est; P , primum ejus terminum; Q , quotientem reliquorum terminorum per primum divisorum, et proinde PQ , summam reliquorum five affirmativè five negativè ponendam; $\frac{m}{n}$, numeralem indicem radices vel dimensionis $P + PQ$, five integer sit, five fractus, five affirmativus five negativus: et in formula posteriore, A , B , C , &c. terminos inter operandum inventos; nempe A , primum terminum $P^{\frac{m}{n}}$; B , secundum $\frac{m}{n}AQ$; C , tertium $\frac{m-n}{2n}BQ$, &c. Porro, eodem redeunt hæ formulæ, uti conferendo inter se terminos utriusque homologos manifestum est. Nam $P^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times 1$; $\frac{m}{n}AQ = P^{\frac{m}{n}} \times \frac{m}{n}Q$; et sic deinceps. Utramque vero posuimus, ex eo quod prior legem progressionis planius exhibendo, terminis seriei continuandis, posterior hisce addendis aptior, ubi pro A , B , C , &c. substituuntur valores numerales quos sortiuntur respective.

58. Theorematis Binomii complures dantur aut dari possunt demonstrationes. Missis autem demonstrationibus ex fluxionali computo haustis, ab opere elementario nimirum ablegandis; vel ex permutationum seu combinationum doctrinâ, non nisi prolixè elicitis: investigationem ejus breviter instituere libet, ex principiis algebrae propriis, ad mentem *Johannis Landen, Treatise on the Residual Analysis*. Cæterum necesse est ut præmittatur Theorema, Lemmatis instar, a *Landeno* absque demonstratione positum.

LEMMA.

Designantibus m et n , numeros quoslibet integros, erit,

$$\frac{p^{\frac{m}{n}} - q^{\frac{m}{n}}}{p - q} = p^{\frac{m}{n} - 1} \times \frac{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^3 \&c. \dots m}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^3 \&c. \dots n}$$

Nam resolvendo in factores suos, fiet,

$$\begin{aligned} \frac{p^{\frac{m}{n}} - q^{\frac{m}{n}}}{p - q} &= \frac{p^{\frac{m}{n}}}{p} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}}{1 - \frac{q}{p}} \\ &= p^{\frac{m}{n} - 1} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}}{1 - \frac{q}{p}} \quad \text{five, multiplicando nu-} \end{aligned}$$

meratorem et denominatorem eadem quantitate $1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}$, cu-
jus index m indicis utriusque $\frac{m}{n}$ et 1, debet esse multiplus,

$$\begin{aligned} &= p^{\frac{m}{n} - 1} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}}{1 - \frac{q}{p}} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}} \quad \text{five,} \\ &= p^{\frac{m}{n} - 1} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}}{1 - \frac{q}{p}} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}} \end{aligned}$$

At si $1 - \frac{q}{p} \Big| ^m$ dividatur per $1 - \frac{q}{p}$ et $1 - \frac{q}{p} \Big| ^n$ respective ;

Fiet,

$$\frac{1 - \frac{q}{p} \Big| ^m}{1 - \frac{q}{p}} = \frac{1 + \frac{q}{p} + \frac{q}{p} \Big| ^2 + \frac{q}{p} \Big| ^3 \&c. \dots \frac{q}{p} \Big| ^{m-1}, \text{ usque ad } m \text{ terminos.}}{1}$$

Itemque,

$$\frac{1 - \frac{q}{p} \Big| ^m}{1 - \frac{q}{p} \Big| ^n} = \frac{1}{1 + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{m}{n}} + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{2m}{n}} + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{3m}{n}} \&c. \dots \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{m-1}{n}} \times \frac{m}{n}, \text{ usque ad } n \text{ terminos.}}$$

Adeoque,

$$\frac{1 - \frac{q}{p} \Big| ^m}{1 - \frac{q}{p}} \times \frac{1 - \frac{q}{p} \Big| ^n}{1 - \frac{q}{p} \Big| ^m} = \frac{1 + \frac{q}{p} + \frac{q}{p} \Big| ^2 + \frac{q}{p} \Big| ^3 \dots m}{1 + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{m}{n}} + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{2m}{n}} + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{3m}{n}} \dots n}$$

Ergo,

$$\frac{\frac{p^m - q^m}{p^m - q}}{p^m - q} = \frac{p^m - 1}{p^m - q} \times \frac{1 + \frac{q}{p} \&c. \dots m}{1 + \frac{q}{p} \Big| ^{\frac{m}{n}} \&c. \dots n}$$

Hoc Theoremate demonstrato, ipsius Theorematis Binomii investigationem expedire jam licet,

THEOREMATIS BINOMII INVESTIGATIO.

59. Quoniam $(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times (1 + Q)^{\frac{m}{n}}$. investiganda est series quantitati $(1 + Q)^{\frac{m}{n}}$ æqualis. Assumatur igitur huic æquipollere seriem $1 + aQ + bQ^2 + cQ^3 + dQ^4$, &c. Nec obstat quo minus per hujusmodi seriem, terminis nimirum integris indicibus perpetuo crescentibus, rite desig-

netur $(1 + Q)^{\frac{m}{n}}$, cum termini successivi intra justum valorem coerceri possint, si modo coefficientes a, b, c , fortiantur fractos. Compendii gratiâ, itaque, substituto x pro Q ,

Ponatur $(1 + x)^{\frac{m}{n}} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$, &c.

Et similiter, assumptâ, ad libitum, aliâ quantitate y ,

Erit $(1 + y)^{\frac{m}{n}} = 1 + ay + by^2 + cy^3 + dy^4$, &c.

Et subducendo posteriorem a priore,

$(1 + x)^{\frac{m}{n}} - (1 + y)^{\frac{m}{n}} = (ax - ay) + (bx^2 - by^2) + (cx^3 - cy^3)$ &c.

Et dividendo per $(1 + x) - (1 + y) = x - y$,

$$\frac{(1 + x)^{\frac{m}{n}} - (1 + y)^{\frac{m}{n}}}{(1 + x) - (1 + y)} = \frac{a(x - y) + b(x^2 - y^2) + c(x^3 - y^3)}{x - y}, \text{ \&c.}$$

Sive, per *Lemma*^f, substituendo $1 + x$ pro p ; et $1 + y$ pro q ;

^f *Lemma* præcedens absque demonstratione protulit *Landen*, in Tractatu cui titulus, *A Discourse concerning the Residual Analysis*, Lond. 1758. speciminis instar, antegresso opus ipsum *The Residual Analysis*, anno 1764 impressum: ubi investigationem ejus aliter instituit auctor, pag. 6. Verum hujus mihi antehæc copia non fuit.

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{\frac{m}{n}} - 1 &= 1 \times \frac{1 + \frac{1+y}{1+x} + \left(\frac{1+y}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1+y}{1+x}\right)^3 \dots m}{1 + \left(\frac{1+y}{1+x}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{1+y}{1+x}\right)^{\frac{2m}{n}} + \left(\frac{1+y}{1+x}\right)^{\frac{3m}{n}} \dots n} \\
 &= a + b(x+y) + c(x^2 + xy + y^2), \&c.
 \end{aligned}$$

Sed salva æquatione, variari potest y ad libitum; fiat igitur $y = x$, et singulis terminis tam numeratoris

$1 + \frac{1+y}{1+x}$ &c. quam denominatoris $1 + \left(\frac{1+y}{1+x}\right)^{\frac{m}{n}}$ &c. per unitatem jam designandis, exponet m summam unitatum in numeratore, et n summam unitatum in denominatore, et proinde $\frac{m}{n}$ totius seriei valorem. Hinc erit,

$$\frac{m}{n} \times (1+x)^{\frac{m}{n}-1} = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 \&c.$$

Et multiplicando per $1+x$, erit,

$$\frac{m}{n} \times (1+x)^{\frac{m}{n}} \text{ five,}$$

$$\frac{m}{n} \times (1+ax + bx^2 \&c. \text{ five,}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n} ax + \frac{m}{n} bx^2 \&c. = a + \frac{2b}{a} x + \frac{3c}{2b} x^2 + \frac{4d}{3c} x^3 \&c.$$

Collatis igitur terminis hinc inde homologis, scil. $\frac{m}{n} = a$;

$\frac{m}{n} ax = (2b+a) x$; &c. eruentur coefficientes,

$$a = \frac{m}{n}.$$

$$b = a \times \frac{m-n}{2n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n}.$$

$$c = b \times \frac{m-2n}{3n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n}.$$

&c.

&c.

Restituto jam Q pro x ; et substitutis his valoribus a, b, c , &c. in seriem $1 + aQ + bQ^2$ &c. emerget,

$$(1+Q)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}Q + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} Q^2 \text{ \&c.}$$

Et proinde,

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times (1+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times \left(1 + \frac{m}{n}Q + \frac{m}{n}\right.$$

$$\left. \cdot \frac{m-n}{2n} Q^2 \text{ \&c. five, } = P^{\frac{m}{n}} \times \left(1 + \frac{m}{n}Q + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} - 1}{2} Q^2 \text{ \&c.}\right.$$

Hinc quoque, erit,

$$(P-PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times \left(1 - \frac{m}{n}Q + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} - 1}{2} Q^2 - \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} Q^3 + \text{ \&c.}\right.$$

mutatis scilicet signis terminorum alternorum a secundo incipientium, quos ingrediuntur impares dimensiones quantitatis jam negativæ Q .

COR. I. Crescente indice Q communi differentiâ 1 in terminis successivis, pariter decrescit index P , ita ut summa indicum utriusque singulis in terminis evadat $\frac{m}{n}$; cum Q revera fit fractio cujus denominator est P . Et quo melius forsan constet ratio decrementi indicis P , formulâ insequente theorema utplurimum efferunt recentiores,

$$(p+q)^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} p^{\frac{m}{n}-1} q + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} - 1}{2} p^{\frac{m}{n}-2} q^2 \text{ \&c.}$$

Ubi designat p , primum terminum; q summam reliquorum.

$$\text{Nam } (p+q)^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{m}{n}} \times \left(1 + \frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$= p^{\frac{m}{n}} \times \left(1 + \frac{m}{n} \frac{q}{p} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \frac{q^2}{p^2} \right) \&c.$$

$$= p^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} p^{\frac{m}{n}-1} q + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} p^{\frac{m}{n}-2} q^2 \&c.$$

COR. II. Si index $\frac{m}{n}$ fit integer et affirmativus, terminabitur series dimensionem quæsitam designans; si non, excurret in infinitum.

Nam si $\frac{m}{n}$ fit integer et positivus, scil. $\frac{m}{n} = m$; (evadente jam $n = 1$.) progressio numeratorum $m, m-1, m-2, m-3$, &c. terminis continuatis per $m-m=0$, necessario transibit, qui idcirco istum terminum cujus compositionem ingreditur, destruet; at hoc termino evanescente, evanescent quoque sequentes inde conflati, adeoque rumpetur series. Numerus autem terminorum in hoc casu erit $m+1$, cum progressio $m, m-1$, &c. non nisi a secundo seriei termino auspicatur, existente unitate primi termini coefficiente. Si $\frac{m}{n}$ fit integer et negativus, scil. $\frac{-m}{1} = -m$; erit $-m-1$ magis negativus, et adhuc magis $-m-2$; adeoque longius a nihilo recedentibus terminis sequentibus, progressio $-m, -m-1, -m-2$, &c. per nihilum transire nequit, adeoque in infinitum excurret series. Hoc quoque ita se habebit, si $\frac{m}{n}$ fit fractus; nam si affirmativè ponatur, *propè* nihilum sed non *per* nihilum transibit progressio $\frac{m}{n}, \frac{m}{n}-1$, &c. Ex. gr. fit $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; erit $\frac{m}{n}-1 = -\frac{1}{2}$; $\frac{m}{n}-2 = -\frac{3}{2}$, &c. si negativè, longius ut antea, a nihilo recedent termini successivi.

60. Hujus theorematís ope, quantitatis cujuslibet compositæ simplices potestates eliciuntur. Ut si desideretur quadratum $a + b$ five $\overline{a+b^2}$ erit $P = a$; $Q = \frac{b}{a}$; $m = 2$; $n = 1$.

adeoque $A (= P^{\frac{m}{n}}) = a^2$; $B (= \frac{m}{n} AQ) = 2ab$;

$C (= \frac{m-n}{2} BQ) = b^2$; $D (= \frac{m-n}{3} CQ) = 0$, cum

factor $\frac{m}{n} - 2 = 2 - 2 = 0$. Ergo termino tertio terminabitur series, eritque $\overline{a+b^2} = a^2 + 2ab + b^2$. Est quoque

$\overline{a+b^5} = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Nam P

$= a$; $Q = \frac{b}{a}$; $m = 5$; $n = 1$. Adeoque, $A (= P^{\frac{m}{n}}) = a^5$;

$B (= \frac{m}{n} AQ) = 5a^4b$; $C = 10a^3b^2$; $D = 10a^2b^3$; $E = 5$

ab^4 ; $F = b^5$ et $G (= \frac{m-n}{6} FQ) = 0$.

61. Eodem modo extrahuntur radices aut quantitatis ipsius aut quarumlibet ejus dimensionum. Ut si quærat

radix quadratica $a^2 + 2ab + b^2$ five $\overline{a^2 + 2ab + b^2}^{\frac{1}{2}}$, erit $P = a^2$;

$Q = \frac{2ab+b^2}{a^2}$; $m = 1$; $n = 2$; adeoque,

$A (= P^{\frac{m}{n}}) = a$

$B (= \frac{m}{n} AQ) = +b + \frac{1b^2}{2a}$

$C (= \frac{m-n}{2n} BQ) = -\frac{1b^3}{2a} - \frac{1b^3}{2a^2} - \frac{1b^4}{8a^3}$

$D (= \frac{m-2n}{3n} CQ) = +\frac{1b^3}{2a^2} + \frac{3b^4}{4a^3} + \frac{3b^5}{8a^4} + \&c.$

$E (= \frac{m-3n}{4n} DQ) = -\frac{5b^4}{8a^3} - \frac{5b^5}{4a^4} - \&c.$

$\&c.$
 $(a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}} = a + b * * * \&c.$

Erit igitur $a + b$ radix quæsitæ, reliquis terminis sese destruentibus, ut æquum est, si series in infinitum continuatur. Atque hac methodo, radices omnium quantitatum perfectas potestates referentium extrahendæ sunt accurate, aliarum vero quamproxime. Sic radix quadrato

$$\text{cubica } c^5 + c^4x - x^5, \text{ five } (c^5 + c^4x - x^5)^{\frac{1}{5}} = c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^3x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9} + \&c. \text{ ut patebit substituendo } c^5 \text{ pro } P;$$

$$\frac{c^4x - x^5}{5c^4} \text{ pro } Q; \quad 1 \text{ pro } m; \text{ et } 5 \text{ pro } n. \text{ fiet enim } A = c, \\ B = \frac{c^4x - x^5}{5c^4} \&c. \text{ Potuit quoque series ordine inverso institui,}$$

$$\text{et tunc foret } = -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + 2c^{10}}{25x^9} + \&c.$$

Prior modus eligendus est, si c sit major quam x ; posterior si contra, ut convergat series: et quo minor Q quam P , eò citius converget series, five paucioribus terminis adhibitis exponetur tota quamproxime. Posito enim quod Q evanescat, primus seriei terminus A totam designabit, evanescentibus secundo $\frac{m}{n} AQ$, et reliquis inde genitis; et

proinde quò minor sit Q , eò minor primo termino evadet secundus; et secundo tertius, &c. Itemque radix cubica ex

$$\text{bi-quadrato } a + b \text{ five } (a + b)^{\frac{4}{3}} \text{ evadit } a^{\frac{4}{3}} + \frac{4a^{\frac{1}{3}}b}{3} + \frac{2b^2}{9a^{\frac{2}{3}}} - \frac{4b^3}{81a^{\frac{5}{3}}} + \&c. \text{ Nam } P = a. \quad Q = \frac{b}{a}. \quad m = 4. \quad n = 3.$$

$$\text{Adeoque, } A (= P^{\frac{m}{n}}) = a^{\frac{4}{3}} \&c.$$

62. Quinetiam divisio five simplex fuerit, five per potestates aut quantitates radicales, ope hujus theorematidis perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$ (hoc est $\overline{d+e}^{-1}$ five $\overline{d+e}^{-\frac{1}{1}}$) in se-

riem simplicium terminorum resolvenda sit; erit $P = d$,

$$Q = \frac{1}{d} \cdot m = -1 \cdot n = 1. \text{ Adeoque, } A (= P^{\frac{m}{n}}) = d^{-1}$$

$$\text{seu } \frac{1}{d}. B (= \frac{m}{n} AQ) = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{1}{d} = -\frac{1}{d^2}. \text{ Et sic}$$

$$C = \frac{1}{d^3}. D = -\frac{1}{d^4}, \&c. \text{ Hoc est, } \frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} + \&c.$$

$$\text{Sic et } \frac{N}{(d+e)^3} \text{ hoc est, } N \text{ divisa ter per } d+e, \text{ vel semel per cubum ejus, vel } N \times \overline{d+e}^{-3} = N \times \frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} + \&c.$$

$$\text{Sic } \frac{N}{(y^3 - a^2y)^{\frac{1}{3}}} \text{ hoc est, } N \times \overline{y^3 - a^2y}^{-\frac{1}{3}} = N \times \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{4a^6}{81y^7} \&c. \text{ Nam } P = y^3. Q = -\frac{a^2}{y^2}. m = -1.$$

$$n = 3. \text{ Adeoque, } A (= P^{\frac{m}{n}} = y^{3 \times -\frac{1}{3}}) = y^{-1} \text{ seu } \frac{1}{y}. B (= \frac{m}{n} AQ) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times -\frac{a^2}{y^2} = \frac{a^2}{3y^3} \&c.$$

$$\text{Itemque, } \frac{\sqrt{c^4 - ccx^2}}{\sqrt{c^4 - ccx^2}} = \frac{c^4 - ccx^2}{c^4 - ccx^2}^{\frac{1}{2}} \times \frac{c^4 - ccx^2}{c^4 - ccx^2}^{-\frac{1}{2}}$$

five compendii gratia, substituto a pro c^3 et b pro $-cc + rr$ evadit factor prior,

$$(a^3 + bx^3)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{bx^3}{2a} - \frac{b^2x^6}{8a^3} + \frac{b^3x^9}{16a^5} - \&c.$$

Et posterior,

$$(a^3 - ax^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a} + \frac{x^3}{2a^2} + \frac{3x^6}{8a^3} + \frac{5x^9}{16a^4} + \&c.$$

Adeoque,

$$(a^3 + bx^3)^{\frac{1}{3}} \times (a^3 - ax^3)^{-\frac{1}{3}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{bx^3}{2a^2} - \frac{b^2x^6}{8a^3} + \frac{b^3x^9}{16a^5} - \&c. \\ \frac{x^3}{2a} + \frac{bx^6}{4a^3} - \frac{b^2x^9}{16a^5} + \&c. \\ + \frac{3x^6}{8a^2} + \frac{3bx^9}{16a^4} - \&c. \\ + \frac{5x^9}{16a^3} + \&c. \end{array} \right.$$

$$= 1 + \frac{a+b}{2a^2} x^3 + \frac{3a^2+2ab-b^2}{8a^4} x^6 + \&c.$$

Adeoque restituendo c^3 pro a et $r^3 - c^2$ pro b , evadit,

$$\left(c^4 - \frac{cc}{rr} x^3 \right)^{\frac{1}{3}} \times (c^4 - ccx^3)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{r^3}{2c^4} x^3 + \frac{4r^2c^2 - r^4}{8c^8} x^6 + \&c.$$

63. Per eandem regulam, in numeris perinde ac in speciebus genesis potestatum, divisio per potestates aut per quantitates radicales, et præsertim extractio radicum altiorum commode instituuntur. Nam quisque numerus ex partibus componi concipiatur, adeoque in binomium æquipollentem resolvi potest.

64. Ut si desideretur quinta potestas numeri 6, resolvatur 6 in partes 1 et 5, eritque $1+5^5 = 7776$. Sit enim $P = 1$, $Q = 5$, $\frac{m}{a} (= \frac{5}{1}) = 5$ erit,

$$A = P^{\frac{m}{a}} = 1$$

$$B = \frac{m}{a} A Q = 25$$

$$C = \frac{\frac{m}{a} - 1}{2} B Q = 250$$

$$D = \frac{\frac{m}{a} - 2}{3} C Q = 1250$$

$$E = \frac{\frac{m}{a} - 3}{4} D Q = 3125$$

$$F = \frac{\frac{m}{a} - 4}{5} E Q = \frac{3125}{7776}$$

Potuit series ordine inverso institui, ponendo $P = 5$ et $Q = \frac{1}{5}$; et idem, ut æquum est, prodiret valor. Potuit quoque 6 in alias partes resolvi, 4 et 2; 3 et 3; 11 et — 5, &c. cæterum facillima prodit involutio ubi P sit unitas.

65. At si quærat^rur radix quadratica 6, resolvendus est 6 in partes 4 et 2; prior enim debet esse numerus quadratus quo rationalis evadet primus seriei terminus, alterâ autem

major quo convergat series. Sit itaque $P = 4$, $Q = \frac{1}{2}$,
 $m = 1$, $n = 2$, eritque, $A (= P^{\frac{m}{n}}) = 2$, $B (= \frac{m}{n} AQ)$
 $= \frac{1}{2}$, $C (= \frac{m-n}{2n} BQ) = -\frac{1}{16}$, &c. Cæterum aggrega-
tum duorum terminorum $2 + \frac{1}{2}$ radicem fere designabit;
nam quadratum hujus seu $\frac{5}{2}$ est $\frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}$, trium vero $2 +$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{39}{16}$, propius; nam hujus quadratum $= \frac{1521}{256}$
 $= 6 - \frac{15}{256}$. Et sic plurium terminorum additione adhuc
propius radicem eruere liceret. Præstat autem de novo se-
riem citius convergentem instituere, resolvendo 6 in partes
 $\frac{25}{4}$ et $-\frac{1}{4}$. Designante enim $P = \frac{25}{4}$, $Q = -\frac{1}{25}$, erit $A =$
 $\frac{5}{2}$, $B = -\frac{1}{20}$, &c. at $\frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$ cujus quadratum $\frac{2401}{400}$
 $= 6 + \frac{1}{400}$. Et si adhuc propius radicem eruere quæ-
ramus, institui potest series citissime convergens, resolvendo
6 in partes $\frac{2401}{400}$ et $-\frac{1}{400}$ his enim pro P et PQ substi-
tutis, evadet $A = \frac{49}{20}$, $B = -\frac{1}{1960}$, at $\frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$
cujus quadratum prodit $\frac{23049601}{3841600} = 6 + \frac{1}{3841600}$.

Si desideretur radix cubica 3, resolvendus est 3 in partes
duas quarum prior debet esse numerus cubicus, scil. 8 et
 -5 , designante enim $P, 8$; $Q, -\frac{5}{8}$; $m, 1$; $n, 3$, erit

$$A (= \sqrt[n]{P}) = 2, B (= \frac{m}{n} AQ) = -\frac{5}{12}, C (= \frac{m^2}{2n} BQ) \\ = -\frac{25}{288}, \&c. \quad \text{Cæterum } 2 - \frac{5}{12} - \frac{25}{288} = \frac{431}{288} \text{ radicem}$$

aliquantulum superabit, nam hujus cubus fit $3 + \frac{8399375}{23887872}$.

Satius igitur foret seriem ab initio quæ citius convergeret condere, quærendo radicem cubicam numeri $8 \times 3 = 24$, quæ duplo major prodibit radice cubica ternarii. Resolvatur itaque 24 in partes 27, et -3 , et ponendo $P = 27$,

$$Q = -\frac{1}{9}, \text{ erit } A = 3, B = -\frac{1}{9}, \&c. \quad \text{Cæterum erit}$$

$$3 - \frac{1}{9} = \frac{26}{9} \text{ radix cubica numeri 24 fere, adeoque hujus}$$

$$\text{femifis } \frac{13}{9} = \sqrt[3]{3} \text{ fere, nam hujus cubus fit } \frac{2197}{729} = 3$$

$$+ \frac{10}{729}. \quad \text{Quamproxime autem eruetur radix ope seriei}$$

citissime convergentis, iterum resolvendo 3 in partes

$$\frac{2197}{729} \text{ et } -\frac{10}{729}, \text{ erit enim } A = \frac{13}{9}, B = -\frac{10}{4563}, \&c. \quad \text{Sed}$$

$$\text{radicis } \frac{13}{9} - \frac{10}{4563} = \frac{6581}{4563} \text{ cubus prodit } 3 + \frac{1976300}{95006081547}.$$

Si desideretur radix quadrato-cubica numeri 33, resolvendus est 33 in partes quarum prior debet esse numerus quadrato-cubicus scilicet 32 et 1, designante enim P, 32;

$$Q, \frac{1}{32}; m, 1; \text{ et } n, 5. \text{ evadet } A = 2, B = \frac{1}{80} \text{ radicis}$$

$$\text{autem } 2 + \frac{1}{80} = \frac{161}{80} \text{ quinta dimensio est } 33 + \frac{41216801}{3276800000}.$$

$$A = P_1 = a, B = \frac{a}{2} \Delta Q = \frac{a}{2} \Delta Q$$

$$C = \frac{a}{2} \Delta Q, \text{ etc. } C_{\text{rest}} = \frac{a}{2} \Delta Q = \frac{a}{2} \Delta Q$$

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

Supplementum fupplementum, cum hinc inde

ANALYSIS ÆQUATIONUM.

PARS SECUNDA.

DE ÆQUATIONE FINALI EX DUABUS PLURIBUSVE MEDIIS ELICIENDA:

66. Cum in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam quantitates incognitæ involvuntur; æquationes istæ, (duæ per vices si modo sint plures duabus) sunt *ita connectendæ*, ut una ex quantitatibus incognitis per singulas operationes tollatur, et tandem emergat æquatio in qua unica manebit quantitas incognita, si tot sunt quantitates incognitæ quot habentur æquationes; ut in problematis determinatis solet. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quam æquationes habentur, tum in æquatione ultimo resultante duæ manebunt quantitates incognitæ; si duabus plures, &c. manebunt tres; et sic deinceps: ut in problematis indeterminatis. Nam sciendum est, quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita tollatur.

67. Quemadmodum Si quærantur duo numeri x et y quorum summa sit a et differentia d . Erit $x + y = a$ et $x - y = d$. Adeoque addendo æqualia æqualibus $2x = a + d$ et $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$. Sive, demendo æqualia ab æqualibus $2y = a - d$ et $y = \frac{a-d}{2}$. Sic quoque, habitis æquationibus $ax = \frac{b^2x - b^3}{z}$ et $x = \frac{az}{x - b}$, multiplicando æqualia æqualibus, prodibit $ax^2 = \frac{ab^2xz - ab^3z}{xz - bz} = ab^2$ five $x = b$.

N

Cæterum rarò ita contexuntur æquationes ut exterminati-
onem tam facilem et expeditam patiantur quantitates in-
cognitæ quas involvunt, præsertim si sint altiorum dimen-
sionum. Possunt etiam duæ vel plures quantitates incog-
nitæ per duas tantum æquationes *fortasse* tolli. Ut si sit
 $ax - by = ab - az$, et $bx + by = b^2 + az$; tum æquali-
bus ad æqualia additis prodibit $ax + bx = ab + b^2$, exter-
minatis utrisque y et z : adeoque $x = b$. Sed ejusmodi
casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere,
vel calculum erroneum esse aut non satis artificiosum.
Modus autem quo una quantitas incognita per singulas
æquationes tollatur ex sequentibus patebit.

DE UNICA INCOGNITA QUANTITATE E DUABUS ÆQUA-
TIONIBUS TOLLENDÆ.

68. REG. I. Cum quantitas tollenda est unius tantum dimen-
sionis in utraque æquatione; valor ejus uterque, per regulas jam
ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus alteri
æqualis.

Hoc idem quoque perficitur (et plerumque facilius) sub-
ducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, et
ponendo residuum æquale nihilo.

69. REG. II. Cum quantitas tollenda unius existit dimensionis
in una æquatione, et duarum pluriumve in altera; quærendus est
valor ejus in priore, & pro se in alteram substituendus.

70. REG. III. Cum quantitas tollenda plurium in utraque
æquatione dimensionum existit; valor maximæ potestatis ejus in
utraque æquatione quærendus est, deinde, si potestates istæ non
sint eædem (et æquatio potestatis majoris deprimi nequeat, adeo ut
evadat ejusdem potestatis cum æquatione minoris) æquatio potestatis

minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem, aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione altera. Tum valores illarum potestatum ponendæ sunt æquales, et æquatio nova prodibit ubi maxima potestas sive dimensio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

71. Harum regularum generalia quædam exempla trademus, quæ tanquam *Formulas* ad minuendum laborem quantitatis multarum dimensionum e duabus æquationibus tollendæ, absque solutione commendat *Newtonus*. Analogiæ autem gratiâ a casu simplicissimo ordiri libet, quo melius constet crescente quantitatis incognitæ dimensione, quantum crescit exterminandi labor. Porro, notandum est, literis initialibus a, b, c, d , &c. in his formulis designari tum quantitates cognitæ, tum quasunque potestates alterius cujusdam quantitatis incognitæ.

FORMULA I.

$$ax + b = 0.$$

$$fx + g = 0.$$

Per REG. I. Erit, $\frac{b}{a} (= -x) = \frac{g}{f}$ adeoque, $bf - ag = 0$.

FORMULA II.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$fx + g = 0.$$

Per REG. II. Substituto $-\frac{g}{f}$ pro x in æquationem priorem,

$$\text{Erit, } \frac{ag^2}{f^3} - \frac{bg}{f} + c = 0.$$

$$\text{Adeoque. } ag^2 - bfg + cf^3 = 0.$$

$$\text{Sive, } (bf - ag)(g) - cf^3 = 0.$$

FORMULA III.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$fx^2 + gx + h = 0.$$

Per REG. III. Erit, $\frac{bx + c}{a} (= -x^2) = \frac{gx + h}{f}$

Adeoque, $x = \frac{ah - cf}{bf - ag}.$

Et, $-x^2 = \frac{(-ah + cf)x}{bf - ag}.$

Adeoque, $\frac{bx + c}{a} (= -x^2) = \frac{(-ah + cf)x}{bf - ag}.$

Et, $x = \frac{-bcf + acg}{b^2f - abg + a^2h - acf}.$

Adeoque, $\frac{ah - cf}{bf - ag} (= x) = \frac{-bcf + acg}{b^2f - abg + a^2h - acf}.$

Unde concinnando, et ordinando erit

$$a^2b^2 - abgb - 2acfb : + b^2fb - bcfg : + acg^2 + c^2f^2 = 0.$$

Et resolvendo in factores *Newtonianos*,

$$(ab - bg - 2cf)(ab) : + (bb - cg)(bf) : + (ag^2 + cf^2)(c) = 0.$$

Idem quoque perfici potuit substituendo per REG. II.

unum ex valoribus x , scilicet $\frac{ah - cf}{bf - ag}$ in alterutram æquationum propositarum, puta priorem, nam ex $a \times \left(\frac{ah - cf}{bf - ag}\right)^2$

+ $b \times \frac{ah - cf}{bf - ag} + c = 0.$ concinnando et ordinando eadem prodibit conclusio.

72. Simili ratione, at calculo maxime laborioso, quantitatem tollendam altiorum dimensionum eliminare possimus. Verum longe concinnius expedietur exterminatio ope regulæ insequentis.

73. REG. IV. Multiplicetur vicissim utraque æquatio eundem referens aut ad eundem reducta gradum, per coefficientem termini altissimi in altera, tum subducendo alterutram æquationem ab altera, tolletur potestas maxima quantitatis incognitæ, et emerget nova et depressior æquatio. Multiplicetur iterum vicissim utraque æquatio per alterius terminum absolutum seu ultimum, tum subducendo, &c. tolletur utriusque terminus ultimus, et dividendo insuper per incognitam quantitatem alia emerget æquatio ad eandem dimensionem depressa. Deinde, collatis his novis æquationibus, eandem operationem iterando tandem tolletur x.

Ad normam hujus jam expediamus solutionem Formulæ tertię, eritque

$$afx^2 + bfx + cf = 0 \quad \text{et} \quad abx^2 + bbx + cb = 0.$$

$$afx^2 + agx + ab = 0 \quad \quad \quad cf x^2 + cgx + cb = 0.$$

$$* (bf - ag)x + cf - ab = 0 \quad \quad (cf - ab)x + (cg - bb) = 0.$$

$$(bf - ag)(cf - ab)x + (cf - ab)^2 = 0.$$

$$(bf - ag)(cf - ab)x + (bf - ag)(cg - bb) = 0.$$

$$* (cf - ab)^2 - (bf - ag)(cg - bb) = 0.$$

$$\text{Sive, } c^2f^2 - 2acfb + a^2b^2 - bcfg + b^2fb + acg^2 - abgb = 0.$$

FORMULA IV.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

$$fx^2 + gx + h = 0.$$

$$afx^3 + bfx^2 + cfx + df = 0.$$

$$afx^3 + agx^2 + ahx = 0.$$

$$* (bf - ag)x^2 + (cf - ab)x + df = 0. \text{ Sive abbreviandi gratiâ,}$$

$$Ax^2 + Bx + df = 0.$$

$$Afx^3 + Bfx + df^3 = 0. \quad Abx^3 + Bbx + dfb = 0.$$

$$Afx^3 + Agx + Ab = 0. \quad df^3x^3 + dfgx + dfb = 0.$$

$$*(Bf - Ag)x + df - Ab = 0. \quad (df^3 - Ab)x + (dfg - Bb) = 0.$$

$$(Bf - Ag)(df^3 - Ab)x + (df^3 - Ab)^2 = 0.$$

$$(Bf - Ag)(df^3 - Ab)x + (Bf - Ag)(dfg - Bb) = 0.$$

$$* (df^3 - Ab)^2 - (Bf - Ag)(dfg - Bb) = 0. \text{ five,}$$

$$d^2f^4 - 2Adf^2b + A^2b^2 - Bdf^2g + B^2fb + Adfg^2 - ABgb = 0.$$

$$= d^2f^3 - 2Adfb - Bdfg + B^2b + Adg^2 + \frac{A^2b^2 - ABgb}{f} = 0.$$

Restitutis jam $bf - ag$ pro A, et $cf - ab$ pro B, prodit,

$$\left. \begin{aligned} d^2f^3 - 2bdf^2b + 3adfgb - cdf^2g + bdfg^2 - adg^3 + c^2f^2b \\ - 2acfh^2 + a^2b^3 + b^3fb^2 - abgh^2 - bcfgh + acg^2b \dots \end{aligned} \right\} = 0.$$

Sive secundum formulam *Newtonianam*,

$$\left. \begin{aligned} (ab - bg - 2cf)ab^2 : + (bb - cg - 2df)bfb : \\ + (ch - dg)(ag^2 + cf^2) : + (3agb + bg^2 + df^2)df \end{aligned} \right\} = 0.$$

FORMULA V.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

$$fx^2 + gx + h = 0.$$

$$afx^4 + bfx^3 + cfx^2 + dfx + ef = 0.$$

$$afx^4 + agx^3 + ahx^2 = 0.$$

$$* (bf - ag)x^3 + (cf - ah)x^2 + dfx + ef = 0.$$

$$\text{Sive,} \quad Ax^3 + Bx^2 + dfx + ef = 0.$$

$$Afx^3 + Bfx^2 + df^2x + ef^2 = 0.$$

$$Afx^3 + Agx^2 + Abx = 0.$$

$$*(Bf - Ag)x^2 + (df^2 - Ab)x + ef^2 = 0.$$

$$\text{Sive, } A'x^2 + B'x + ef^2 = 0.$$

$$A'fx^2 + B'fx + ef^3 = 0. \quad A'hx^2 + B'hx + ef^2h = 0.$$

$$A'fx^2 + A'gx + A'h = 0. \quad ef^3x^2 + ef^2gx + ef^2h = 0.$$

$$*(B'f - A'g)x + ef^3 - A'h = 0. \quad (ef^3 - A'h)x + ef^2g - B'h = 0.$$

$$(B'f - A'g)(ef^3 - A'h)x + (ef^3 - A'h)^2 = 0.$$

$$(B'f - A'g)(ef^3 - A'h)x + (B'f - A'g)(ef^2g - B'h) = 0.$$

$$*(ef^3 - A'h)^2 - (B'f - A'g)(ef^2g - B'h) = 0.$$

$$e^2f^6 - 2A'ef^3h + A'^2h^2 - B'ef^2g + A'ef^2g^2 + B'^2fh - A'B'gh = 0.$$

$$\text{five } e^2f^5 - 2A'ef^2h - B'ef^2g + A'efg^2 + B'^2h + \frac{A'^2h^2 - A'B'gh}{f} = 0.$$

Restitutis valoribus A' et B' scilicet Bf - Ag et df^2 - Ab erit,

$$\left. \begin{aligned} e^2f^5 - 2Bef^3h + 3Aef^2gh - def^4g + Bef^2g^2 - Aefg^3 \\ + d^2f^4h - 2Adf^2h^2 + A^2h^3 + B^2fh^2 - ABgh^2 \\ - Bdf^2gh + Adfg^2h \end{aligned} \right\} = 0.$$

Restitutis iterum valoribus A et B, ordinando et dividendo per f, erit,

$$\left. \begin{aligned} a^2h^4 - abgh^3 - 2acfh^3 + b^2fh^3 - bdfgh^2 - 2bdf^2h^2 \\ + acg^2h^2 - adg^3h + aeg^4 - 4aefg^2h + e^2f^2h^2 - cdf^2gh \\ + cef^2g^2 - 2cef^3h + 3adfg^2h + bdfg^2h + d^2f^3h \\ + 2aef^2h^2 + 3bef^2gh - def^3g + e^2f^4 - befg^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Unde facile elicitor formula *Newtoniana*,

$$\left. \begin{aligned} (ab - bg - 2cf) ah^3 : + (bh - cg - 2df) bfh^2 : + (ag^2 \\ + cf^2) (ch^2 - dgh + eg^2 - 2efb) : + (3agb + bg^2 \\ + df^2) dfh : + (2ab^2 + 3bgh - dfg + ef^2) ef^2 : - (bg \\ - 2ab) efg^2 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Cæterum observandum est terminum $-4aefg^2b$ supra memoratum a *Newtono* in binos resolveri, scilicet $ag^3 \times -2efb$ & $-2ab \times efg^2$.

FORMULA VI.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

$$fx^3 + gx^2 + hx + k = 0.$$

$$afx^3 + bfx^2 + cfx + df = 0.$$

$$akx^3 + bkkx^2 + ckx + dk = 0.$$

$$afx^3 + agx^2 + ahx + ak = 0.$$

$$dfx^3 + dgx^2 + dhx + dk = 0.$$

$$*(bf - ag)x^2 + (cf - ah)x + df - ak = 0.$$

$$(df - ak)x^2 + (dg - bk)x + dh - ck = 0.$$

$$\text{Sive, } Ax^2 + Bx + C = 0.$$

$$Cx^2 + Dx + F = 0.$$

$$ACx^2 + BCx + C^2 = 0.$$

$$AFx^2 + BFx + CF = 0.$$

$$ACx^2 + ADx + AF = 0.$$

$$C^2x^2 + CDx + CF = 0.$$

$$*(BC - AD)x + C^2 - AF = 0.$$

$$(C^2 - AF)x + CD - BF = 0.$$

$$(BC - AD)(C^2 - AF)x + (C^2 - AF)^2 = 0.$$

$$(BC - AD)(C^2 - AF)x + (BC - AD)(CD - BF) = 0.$$

$$*(C^2 - AF)^2 - (BC - AD)(CD - BF) = 0.$$

$$\text{Sive, } C^3 - 2ACF - BCD + B^2F + AD^3 + \frac{A^2F^2 - ABDF}{C} = 0.$$

Sive reſtitutis valoribus A, B, C, D, F, erit,

$$\left. \begin{aligned} d^3f^3 - 3ad^2f^2k + 3a^2dfk^2 - a^3k^3 - 2bd^2f^2h + 3ad^2fgh \\ + abdfbh - 3a^2dgbk + 3bcd^2f^2k - acdfgk - 3abcfk^2 \\ + 2a^3cgbk^2 - cd^2f^2g + a^2bbk^2 + c^2df^2h - 2acdfh^2 + a^2dh^3 \\ - c^3f^2k + 2ac^2fbk - a^2ch^2k + bd^2fg^2 - 2b^2dfgk + b^3fk^2 \\ - ad^2g^3 + 2abd^2g^2 - ab^2gk^2 + b^2dfh^2 - abdgh^2 - b^2cfhk \\ + abcgkh - bcd^2fgh + acd^2g^2h + bc^2fgk - ac^2g^2k \end{aligned} \right\} = 0.$$

Unde ſi ordine debito diſponantur termini elicietur formula *Newtoniana*,

$$\left. \begin{aligned} (ab - bg - 2cf)(adh^2 - achk) : + (ak + bh - cg - 2df) \\ bdfb : (-ak + bh + 2cg + 3df)a^2k^2 : + (cdb - d^2g \\ - c^2k + 2bdk)(ag^2 + cf^2) : + (3agb + bg^2 + df^2 - 3afk) \\ d^2f : (-3ak - bh + cg + df)bcfk : + (bk - 2dg)b^2fk : \\ (-b^2k - 3adb - cdf)agk \quad - \quad - \quad - \quad - \end{aligned} \right\} = 0.$$

Cæterum notandum eſt terminum $3bcd^2f^2k$ a *Newtono* in binos reſolvi, ſcilicet $2bdk \times cf^2$ & $df \times bcfk$.

FORMULA VII.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

$$fx^4 + gx^3 + hx^2 + kx + l = 0.$$

$$afx^4 + bfx^3 + cfx^2 + dfx + ef = 0. \quad alx^4 + blx^3 + clx^2 + dlx + el = 0$$

$$afx^4 + agx^3 + ahx^2 + akx + al = 0. \quad ef^2x^4 + egx^3 + ehx^2 + ekx + el = 0$$

$$*(bf-ag)x^3 + (cf-ab)x^2 + (df-ak)x + cf-al = 0. \quad (ef-al)x^3 + (eg-bl)x^2 + (eh-dl)x + el-dl = 0.$$

$$\text{ſive, } Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \quad Dx^3 + Fx^2 + Gx + H = 0.$$

$$ADx^3 + BDx^2 + CDx + D^2 = 0. \quad AHx^3 + BHx^2 + CHx + DH = 0.$$

$$ADx^3 + AFx^2 + AGx + AH = 0. \quad D^2x^3 + DFx^2 + DGx + DH = 0.$$

$$\frac{* (BD - AF)x^2 + (CD - AG)x + D^2 - AH = 0.}{(D^2 - AH)x^2 + (DF - BH)x + DG - CH^* = 0.}$$

$$\text{five,} \quad A'x^2 + B'x + C' = 0. \quad C'x^2 + D'x + F' = 0.$$

$$A'C'x^2 + B'C'x + C'^2 = 0. \quad A'F'x^2 + B'F'x + C'F' = 0.$$

$$A'C'x^2 + A'D'x + A'F' = 0. \quad C'^2x^2 + C'D'x + C'F' = 0.$$

$$\frac{* (B'C' - A'D')x + C'^2 - A'F' = 0.}{(C'^2 - A'F')x + C'D' - B'F'^* = 0.}$$

$$(B'C' - A'D')(C'^2 - A'F')x + (C'^2 - A'F')^2 = 0.$$

$$(B'C' - A'D')(C'^2 - A'F')x + (B'C' - A'D')(C'D' - B'F') = 0.$$

$$\frac{* (C'^2 - A'F')^2 - (B'C' - A'D')(C'D' - B'F') = 0.}{}$$

Sive,

$$C'^4 - 2A'C'^2F' + A'^2F'^2 - B'C'^2D' + B'^2C'F' + A'C'D'^2 - A'B'DF' = 0.$$

Sive,

$$C'^2 - 2A'F' - B'D + \frac{B'^2C'F' + A'C'D'^2 + A'^2F'^2 - A'B'DF'}{C'^2} = 0.$$

75. Hujus reductione, substitutis nimirum valoribus A' , B' , C' , D' et F' tandem eruere licet æquationem 8 dimensionum quæ formulam quæsitam præ se feret. Simili ratione instituenda est eliminatio quantitatis x ex æquationibus altiorum dimensionum. In genere autem notandum est, quod dimensio æquationis ultimo resultantis transcendere non debet summam dimensionum æquationum propositarum. Huc etenim redit hæc eliminatio, ut inveniat æquatio nova cujus radix quælibet seu valor quantitatis x in alterutram æquationem datam substituta eam evanescere faciet; at si dimensio æquationis finalis hac methodo comparandæ hanc summam excedat, ex radicibus ejus nonnullæ finem quæsitum non assequentur, radicibus in-

utilibus unà cum utilibus, admittis. Inutiles igitur radices, deprimendo æquationem ad dimensionem debitam ope divisoris alicujus semper in æquatione finali latentis, reciduntur. Sic in formula VI ascendit ad octavum gradum æquatio finalis $C^4 - 2AC^2F$, &c. $= 0$, dividendo autem per quadraticam C sive $df - ak$, $= 0$, ad sextum deprimitur. In novissima item formula, æquatio $C'^4 - 2A'C'^2F'$, &c. $= 0$. 16 dimensionum, ad æquationem 8 dimensionum deprimenda est ope divisoris C'^2 sive $(gf - al)^2 - (bf - ag)(ek - dl)^2 = 0$. Et quo altius assurgunt dimensiones æquationum propositarum eo grandior adhibendus est divisor, et proinde eo molestior exterminandi labor. Hujus igitur minuendi gratiâ varias excogitarunt exterminandi methodos Viri Clari, *Cramer*, *Introduction à l'Analyse des lignes Courbes Algebriques*; *Euler*, *Acad. Berlin*, anno 1764; *Bezout*, *Memoirs de l'Acad. Paris*, anno 1764; et *La Grange*, *Acad. Berlin* 1769.

Formulis his *Newtonianis* jam investigatis, (exemplis quidem in exercitationem tyronum probe accommodatis) quorundam problematum solutiones adjungere libet, quo melius constet regularum necnon formularum usus.

P. R. O. B. I.

76. *Invenire duos numeros x et y, quorum summa sit s et productum p.*

Habitis duabus æquationibus $x + y = s$, et $xy = p$, substituatur valor x ex priore resultans $s - y$ in posteriorem, et prodibit $s - y \times y = p$. Adeoque, $y^2 = sy - p$. Et per reductionem, $y = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$. Ut si s sit 140; et p , 3136; substituendo prodibit $y = 70 \pm 42 = 28$ vel 112, quorum alterutrum designante y alterum designabit x .

Exterminari potuit x ex æquationibus $x + y - s = 0$ et $xy - p = 0$, ope Formulæ I. substituendo pro a , b ; f , g ; 1 , $y - s$; y et $-p$ respective: prodit enim $(y - s \times y) - (1 \times -p) = 0$. seu $y^2 = sy - p$ ut supra.

77. Hinc liquet, quod propositis duabus quantitibus incognitis methodus designandi alteram ex aliqua quæstionis conditione, in solvendis problematis antecedentibus adhibita, eodem redit ac exterminatio speciei hanc quantitatem incognitam referentis, eliciendo valorem ejus ex una æquatione eundemque in alteram substituendo.

P R O B. II.

78. *Invenire summam quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. duorum numerorum quorum summa sit s et productum p .*

Designantibus x et y numeros quæsitos, erit,
 $x + y = s$. Adeoque quadrando, $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$
 et $xy = p$. Subduc $- \quad - \quad 2xy \quad = 2p$.

Erit *summa quadratorum* $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$.

Multiplicando hanc æquationem per $x + y = s$,

Prodit $- \quad x^3 + (x + y)xy + y^3 = s^3 - 2sp$
 Subduc $- \quad (x + y)xy \quad = sp$

Eritque *summa cuborum* $x^3 + y^3 = s^3 - 3sp$.

Multiplicando iterum per $x + y = s$,

Prodit $x^4 + (x^2 + y^2)xy + y^4 = s^4 - 3s^2p$
 Subduc $(x^2 + y^2)xy \quad = (s^2 - 2p)p$

Eritque *summa biquad.* $x^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2$.

Hinc innotescit lex progressionis, si quærat^r summa potestatum altiorum; semper enim invenietur multiplicando summam potestatum ultimo inventarum per s , et subducendo a producto summam penultimarum in p ductarum. Et sic universaliter: erit summa potestatum $n =$

$$s^n - ns^{n-2}p + n \cdot \frac{n-3}{2} \cdot s^{n-4}p^2 - \frac{n-4}{2} \cdot \frac{n-5}{3} \cdot s^{n-6}p^3 + n \cdot \frac{n-5}{2} \cdot \frac{n-6}{3} \cdot \frac{n-7}{4} \cdot s^{n-8}p^4, \&c.$$

P R O B. III.

79. Invenire summam quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. ex singulis quantitibus a, b, c, d , &c. ordinis cujuscunque, quarum summa $a + b + c + d$, &c. sit P ; summa rectangulorum sub singulis binis, $ab + ac + ad$, &c. $bc + bd$, &c. $+ cd$, &c. sit Q ; summa contentorum sub singulis ternis, $abc + abd + abe$, &c. $+ acd + ace$, &c. $+ bcd$, &c. sit R , &c. &c.

Designantibus

p , summam quantitatum b, c, d , &c. post primam a .

q , summam rectangulorum $bc + bd$, &c. $+ cd$, &c. post pa .

r , summam contentorum bcd , &c. $+ cde$, &c. post qa .

&c.

&c.

Erit

$$P = a + p. \text{ Adeoque, quadrando, } P^2 = a^2 + 2pa + p^2$$

$$Q = pa + q. \text{ Subduc } 2Q = 2pa + 2q.$$

$$R = qa + r. \text{ Eritque summa quadrat. } P^2 - 2Q = a^2 + p^2 - 2q$$

$$S = rq + s. \text{ Multiplicando hanc æquationem per } P = a + p.$$

$$\&c. \quad \&c. \quad \text{Erit } P^3 - 2PQ = a^3 + p^3 + pa^2 + p^2a - 2qa - 2pq$$

$$\text{Subduc } PQ = pa^2 + p^2a + qa + pq$$

$$\begin{array}{r} P^3 - 3PQ = a^3 + p^3 - 3qa - 3pq \\ \text{Adde. } 3R = + 3qa + 3r \end{array}$$

$$\text{Eritque Summa cuborum } P^3 - 3PQ + 3R = a^3 + p^3 - 3pq + 3r.$$

Multiplicando hanc per $P = a + p$,

Q

$$\text{Erit } P^4 - 3P^2Q + 3PR = a^4 + p^4 + pa^3 + p^3a - 3pqa + 3ra - 3p^2q + 3pr$$

$$\text{Subduc } P^2Q - 2Q^2 = pa^3 + p^3a - 2pqa + qa^2 + p^2q - 2q^2$$

$$P^4 - 4P^2Q + 3PR + 2Q^2 = a^4 + p^4 - qa^2 - pqa + 3ra - 4p^2q + 3pr + 2q^2$$

$$\text{Adde } PR = qa^2 + pqa + ra + pr$$

$$P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2Q^2 = a^4 + p^4 + 4ra - 4p^2q + 4pr + 2q^2$$

$$\text{Subduc } 4S = 4ra + 4s$$

Eritque *summa biquadratorum*

$$P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2Q^2 - 4S = a^4 + p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2 - 4s.$$

Similiter, præcedentes operationes continuando donec omnes exterminentur dimensiones *a* præter quæsitam, prohibet *summa quintarum potestatum*, $P^5 - 5P^3Q + 5P^2R + 5PQ^2 - 5PS - 5QR + 5T$. Et sic deinceps. Cæterum combinando valores inter operandum inventos, contractiùs exponere licet summas potestatum quæsitaram; Ut eleganter *Newtonus*, qui hæc formulis insequentibus primus absque demonstratione proposuit. Scilicet

$$P - - - - - = A$$

$$P^2 - 2Q - - - - - = PA - 2Q = B$$

$$P^3 - 3PQ + 3R - - - = PB - QA + 3R = C$$

$$P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2Q^2 - 4S = PC - QB + RA - 4S = D$$

$$P^5 - 5P^3Q + \&c. - - - = PD - QC + RB - SA + 5T = E$$

$$P^6 - 6P^4Q + \&c. - - - = PE - QD + RC - SB + TA - 6V = F$$

Et sic in infinitum, observatâ lege progressionis. Necessè autem est ut probe observentur signa quantitatum *a, b, c, &c.* si modo diversis afficiantur signis. Has omnes affirmativè posuimus, hoc tantum innuentes, eas, secundum signa singulis propria esse addendas seu aggregandas, sive hæc sint affirmativa sive negativa.

Conclusiones præcedentes verè exponere summam quadratorum, cuborum, &c. ita per inductionem constabit.

$$P^2 - 2Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ \&c.}$$

Caf. 1. Datis tribus quantitibus a, b, c , erit $p = b + c$.
Sed per *Prob. II.* $p^2 - 2q = b^2 + c^2$. Ergo, $P^2 - 2Q$
($= a^2 + p^2 - 2q$) $= a^2 + b^2 + c^2$.

Caf. 2. Datis quatuor, erit $p = b + c + d$. Sed per *Caf. 1.* $p^2 - 2q = b^2 + c^2 + d^2$. Ergo, $P^2 - 2Q$ ($= a^2 + p^2 - 2q$) $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Caf. 3. Datis quinque, erit $p = b + c + d + e$. Sed per *Caf. 2.* $p^2 - 2q = b^2 + c^2 + d^2 + e^2$. Ergo, &c. Et sic deinceps.

$$P^3 - 3PQ + 3R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \text{ \&c.}$$

Caf. 1. Datis tribus quantitibus, erit $p = b + c$. Sed per *Prob. II.* $p^3 - 3pq = b^3 + c^3$. Ergo, $P^3 - 3PQ$ ($= a^3 + p^3 - 3pq$) $= a^3 + b^3 + c^3$. Ab hoc casu nimirum ablegatis $3R$ et $3r$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Caf. 2. Datis quatuor, erit } p = b + c + d. \text{ Sed,} & & \\ p^3 & = & b^3 + c^3 + d^3 + 3b^2c + 3bc^2 + 3b^2d + 3c^2d + 3bd^2 + 3cd^2 + 6bcd. \\ - 3pq & = & - 3b^2c - 3bc^2 - 3b^2d - 3c^2d - 3bd^2 - 3cd^2 - 9bcd. \\ + 3r & = & + 3bcd. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Sive, } p^3 - 3pq + 3r = b^3 + c^3 + d^3. \\ \text{Ergo, } P^3 - 3PQ + 3R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3. \end{array}$$

Caf. 3. Datis quinque, erit $p = b + c + d + e$. Sed per *Caf. 2.* $p^3 - 3pq + 3r = b^3 + c^3 + d^3 + e^3$. Ergo, &c. Et sic deinceps. Simili quoque argumentatione in potestatibus altioribus constabit.

80. Brevius quidem et elegantius, cæterum argumento paulo subtiliore idem colligit *Simpson, Algebra. p. 129.* Quoniam enim singulæ quantitates $a, b, c, d, \&c.$ pariter versantur in æquationibus originalibus seu datis $P = a + b + c, \&c.$ $Q = abc, \&c.$ necesse est, ut pariter quoque versentur in conclusionibus inde elicitis; adeoque, si valores p et q actu substituantur in æquationem $P^3 - 2Q = a^3 + p^3 - 2q$, liquet nullas restare posse dimensiones quantitatum $a, b, c, \&c.$ præter quadrata, ex eo quod nulla dimensio quantitatis a præter quadratum in hac æquatione occurrit. Et simili argumento colligi potest nullas dimensiones quantitatum $a, b, c, \&c.$ præter cubos in æquatione $P^3 - 3PQ + 3R = a^3 + p^3 - 3pq + 3r$ versari. Atque ita deinceps.

P R O B. IV.

81. *Invenire tres numeros continue proportionales, quorum summa sit $20 = a$, et quadratorum summa $140 = b$.*

Habitis æquationibus $x + y + \frac{y^3}{x} = 20$, et $x^2 + y^3 + \frac{y^4}{x^2} = 140$, substituatur in posteriorem pro $\frac{y^4}{x^2}$ valor ejus ex priore comparandus, scilicet $(20 - x - y)^2$, et concinnando prodibit $x^2 + y^3 + y - 20x - 20y = -130$. Subducatur hæc æquatio ab $x^2 + y^3 + y - 20x = 0$, ad quam utique revocanda est prior, et manebit $20y = 130$ seu $y = 6\frac{1}{2}$.

Invento jam y , ut inveniatur x , substituatur $6\frac{1}{2}$ pro y in æquationem $x + y + \frac{y^3}{x} = 20$. Et concinnando prodibit

$x^2 = 13\frac{1}{2}x - 42\frac{1}{4}$. Et per reductionem $x = 6\frac{3}{4} \pm \sqrt{45\frac{9}{16} - 42\frac{1}{4}} = 6\frac{3}{4} \pm \sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maxi-

mus quæſitorum trium numerorum, et $6\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse x , existente altero $\frac{y^2}{x}$; cum in ferie proportionalium vel crescente vel decreſcente conſtituetur x , indeque in priore caſu deſignabit maximum proportionalium, in poſteriore minimum.

82. Exterminari potuit x ex æquationibus $x^3 + y - 20x + y^3 = 0$, et $x^4 + y^3 - 140x^2 + y^4 = 0$, ad quas redigendæ ſunt præcedentes, ſubſtituendo in *Formulam V*, pro $a, b, c, d, e; f, g$, & $b: 1, 0, y^2 - 20, 0, y^4; 1, y - 20$, & y^2 , reſpective. Et, propter defectum termini ſecundi et quarti in æquatione poſteriore, evaneſcentibus b & d necnon formulæ terminis quorum factores ſunt b & d , emerget $(-y^2 + 280)y^6 : * + (2y^2 - 40y + 260)(260y^4 - 40y^3) : * + (3y^4)y^4 : - 2y^2(y^6 - 40y^5 + 400y^4) = 0$. Unde multiplicando et delendo ſuperflua, prodibit $1600y^6 - 20800y^5 - 67600y^4 = 0$, ac reducendo, $4y^2 - 52y + 169 = 0$. Sive radice extractâ, $2y - 13 = 0$, ſeu $y = 6\frac{1}{2}$. Ut ſupra. Veruntamen exterminatio quantitatis incognitæ plurium dimensionum plerunque operoſior evadit formularum ope, quam ſi ab ipſis regulis auſpicemur.

Sunt et alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque sæpenumero contractius.

83. Ut ſi generaliter enuncietur quæſtio, habitis æquationibus $x + y + \frac{y^2}{x} = a$, et $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b$, prior tranſponendo dat $a - y = x + \frac{y^2}{x}$. Et partibus quadratis $a^2 - 2ay$

+ $y^2 = x^2 + 2y^2 + \frac{y^4}{x^2}$. Et subducendo utrinque y^2 , erit

$a^2 - 2ay (= x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2}) = b$. Adeoque $y = \frac{a - \frac{b}{a}}{2}$. Quo substituto pro y in æquationem $x^2 = a - y$ $x - y^2$, erit

$x^2 = \frac{a + \frac{b}{a}}{2} x - \frac{a^2 - 2b + \frac{b^2}{a^2}}{4}$. Et per reductionem,

$$x = \frac{a + \frac{b}{a} \pm \sqrt{-3a^2 + 10b - \frac{3b^2}{a^2}}}{4}.$$

Aliter.

84. Designantibus jam x et y proportionales extremos, medium designabit $\sqrt{xy}$. Eritque, $x + \sqrt{xy} + y = a$, & $x^2 + xy + y^2 = b$. Dividatur secunda æquatio per primam et prodibit $x - \sqrt{xy} + y = \frac{b}{a}$. Subducatur hæc a prima, eritque $2\sqrt{xy} = a - \frac{b}{a}$; et medius $\sqrt{xy} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$. Ut supra. Unde cognoscatur summa et productum extremorum x et y , adeoque & ipsi extremi per *Prob. I.*

P R O B. V.

85. *Invenire quatuor numeros continue proportionales, quorum datur summa a, & summa quadratorum b.*

Designantibus x et y medios numeros quæsitos, designabunt, ex natura continuè proportionalium, $\frac{x^2}{y}$ et $\frac{y^2}{x}$ extremos. Habentur itaque æquationes $\frac{x^2}{y} + x + y + \frac{y^2}{x} = a$,

et $\frac{x^4}{y} + x^3 + y^3 + \frac{y^4}{x} = b$. Ponamus jam $x + y = s$ et $xy = p$; eritque $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = a - s$, itemque $\frac{x^2y^2}{xy} = p$ propter proportionalitatem. Sed per *Prob. II.*

Erit summa quadrat. $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$

Et summa quadrat. $\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} = (a - s)^2 - 2p$.

Adeoque his additis $\frac{x^4}{y^2} + x^2 \&c. = (a - s)^2 + s^2 - 4p = b$

Sive, substit. $\frac{s^3}{2s + a}$ pro p^* - - $(a - s)^2 + s^2 - \frac{4s^3}{2s + a} = b$

Sive, concinnando, - - - $s^2 = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b$

Et per reductionem, - - - $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b}$.

Invento s , innotescit $p = \frac{s^3}{2s + a}$. Itemque ob $s = x + y$

$(= x) = \frac{p}{y}$ prodit $sy - y^2 = p$, et $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$. Invento autem y innotescit x , et proinde quatuor proportionales quæsitæ.

* $\frac{s^3}{2s + a} = p$. Nam - - $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = a - s$.

Adeoque, - - $x^3 + y^3 (= \overline{a-s} xy) = (a - s)p$

Itemque, per *Prob. II.* $x^3 + y^3 = s^3 - 3sp$.

Adeoque, - - - $s^3 - 3sp = ap - sp$

Et - - - $s^3 = 2sp + ap$.

Ergo, - - - $\frac{s^3}{2s + a} = p$.

In hac solutione secuti sumus *Simpson*. Eundem valorem s , at operosius quidem, contra morem suum, exquirat *Newtonus*. Aliam quoque et elegantem hujus problematis (necnon insequentis) solutionem a *De Moivre* inventam proferre jam libet. Vide *Sanderson. Algebra*, Vol. I, p. 263.

86. Designantibus x^3, x^2y, xy^2, y^3 quatuor proportionales quæsitos, erit

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a. \text{ Adeoque, } (x+y)(x^2+y^2) = a.$$

$$x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 = b. \text{ Adeoque, } (x^2+y^2)(x^4+y^4) = b.$$

$$\text{Abbreviandi gratiâ, finge } x+y=z, \text{ et } x^2+y^2=v.$$

$$\text{Eritque } - - - - - zv = a, \text{ et } v = \frac{a}{z}$$

$$\text{Itemque } - - - v \times (x^4 + y^4) = b, \text{ et } x^4 + y^4 = \frac{b}{v}.$$

$$\text{Cæterum ob } x+y=z, \text{ erit } x^2+y^2+2xy=z^2$$

$$\text{Sive, substituendo, } - - - v + 2xy = z^2$$

$$\text{Adeoque, } - - - - - 2xy = z^2 - v.$$

$$\text{Et quadrando, } - - - - - 4x^2y^2 = z^4 - 2vz^2 + v^2.$$

$$\text{Porro, ob } x^2+y^2=v, \text{ erit } x^4+y^4+2x^2y^2=v^2$$

$$\text{Sive, substituendo, } - - - \frac{b}{v} + 2x^2y^2 = v^2$$

$$\text{Adeoque, } - - - - - 2x^2y^2 = v^2 - \frac{b}{v}$$

$$\text{Et, } - - - - - 4x^2y^2 = 2v^2 - \frac{2b}{v}$$

$$\text{Erit igitur, } - z^4 - 2vz^2 + v^2 (= 4x^2y^2) = 2v^2 - \frac{2b}{v}$$

$$\text{Adeoque, } - - - z^4 - 2vz^2 = v^2 - \frac{2b}{v}$$

$$\text{Sive, ob } v = \frac{a}{z}, - - - z^4 - 2az = \frac{a^2}{z^2} - \frac{2bz}{a}$$

$$\text{Adeoque, } - - - z^6 + \left(\frac{2b}{a} - 2a\right)z^3 = a^2$$

Unde per reductionem § 48, elicietur z et exinde v . His autem cognitis innotescunt x et y . Erat enim,

$$\begin{array}{llll}
 & x^2 + y^2 + 2xy = z^2 \\
 \text{Subduc} & - & - & x^2 + y^2 = v \\
 \text{Eritque} & - & - & * \quad 2xy = z^2 - v \\
 \text{Atque harum differentia} & x^2 + y^2 - 2xy = v - (z^2 - v) = 2v - z^2 \\
 \text{Et extracta radice} & - & x - y = \sqrt{2v - z^2} \\
 \text{Huic adde} & - & - & x + y = z \\
 \text{Eritque} & - & - & 2x = z + \sqrt{2v - z^2} \\
 \text{Et} & - & - & x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{2v - z^2} \\
 \text{Erit quoque} & - & - & 2y = z - \sqrt{2v - z^2} \\
 \text{Et} & - & - & y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{2v - z^2}
 \end{array}$$

Cognitis igitur x et y , innotescunt quatuor proportionales quæsitæ.

EXEMP. Sit $a = 30$, et $b = 340$; erat, per præced.

$$z^6 = \frac{2a^2 - 2b}{a} z^3 + a^3$$

Sive, posito $\frac{a^2 - b}{a} = d$, $z^6 = 2dz^3 + a^3$

Adeoq. $z^3 = d + \sqrt{d^2 + a^3}$

Cæterum $d = \frac{a^2 - b}{a} = \frac{900 - 340}{30} = \frac{56}{3}$

Adeoq. $d^2 + a^3 = \frac{3136}{9} + 900 = \frac{11236}{9}$

Et $\sqrt{d^2 + a^3} = \frac{106}{3}$.

Adeoq. $z^3 = d + \sqrt{d^2 + a^3} = 54 = 27 \times 2$. Sit $c^3 = 2$,

Eritq. $z^3 = 27c^3$, et proinde $z = 3c$. Sed $v = \frac{a}{z} = \frac{30}{3c} = \frac{10}{c} = \frac{10c^2}{c^3} = 5c^2$.

Itemque $2v - z^2 = 10c^2 - 9c^2 = c^2$, et $\sqrt{2v - z^2} = c$.

Ergo $x = \frac{z + \sqrt{2v - z^2}}{2} = \frac{3c + c}{2} = 2c$. Et $y = \frac{z - \sqrt{2v - z^2}}{2} = c$.

Adeoque proportionales	x^3 ,	x^2y ,	xy^2 ,	y^3
Evadent	-	-	-	$8c^3$, $4c^3$, $2c^3$, $1c^3$
Sive	-	-	-	16 , 8 , 4 , 2 .

P R O B. VI.

87. *Invenire quinque numeros continue proportionales, quorum datur summa a, et quadratorum summa b.*

Designantibus x, y & z medios numeros quæsitos, designabunt $\frac{x^2}{y}$ et $\frac{z^2}{y}$ extremos. Habentur itaque æquationes.

$$\frac{x^2}{y} + x + y + z + \frac{z^2}{y} = a, \text{ et } \frac{x^4}{y^2} + x^2 + y^2 + z^2 + \frac{z^4}{y^2} = b.$$

Ponamus $x + z = u$, eritque $\frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{y} = a - u - y$; et propter proportionalitatem, tam $\frac{x^2 z^2}{y^2}$ quam $xz = y^2$.

$$\text{Adeoque per Prob. II. } \frac{x^4}{y^2} + \frac{z^4}{y^2} = (a - u - y)^2 - 2y^2.$$

Et fimiliter, $x^2 + z^2 = u^2 - 2y^2$. Seu dividendo per y , $\frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{y} = \frac{u^2 - 2y^2}{y}$. Adeoque, substituendo erit

$$\text{Summa proport.} \quad - \quad - \quad - \quad \frac{u^2 - 2y^2}{y} : + u : + y = a$$

$$\text{Et sum. quad. } (a - u - y)^2 - 2y^2 : + u^2 - 2y^2 : + y^2 = b$$

Quibus reductis, erit

$$a^2 - 2au - 2ay + 2u^2 + 2uy - 2y^2 = b$$

$$\text{Et} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad ay - u^2 - uy + y^2 = 0$$

Harum priori addatur duplum posterioris,

$$\text{Eritque} \quad - \quad - \quad - \quad a^2 - 2au = b; \text{ five } u = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}b}{a}$$

Cæterum transponendo, fuit $y^2 + ay - uy = u^2$

$$\text{Adeoque} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad y = \frac{u - a}{2} + \sqrt{\frac{(u - a)^2}{4} + u^2}$$

Cognitis autem u et y , innotescunt x et z , et proinde quinque proportionales quaesiti.

Aliter.

88. Habitis jam secundum notationem *Moiivreanam*, æquationibus

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = a, \text{ adeoque } \frac{x^5 - y^5}{x - y} = a$$

$$x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 = b, \text{ adeoque } \frac{x^{10} - y^{10}}{x^2 - y^2} = b.$$

Dividendo quartam æquationem per tertiam, erit

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} \text{ seu } x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = \frac{b}{a}.$$

$$\text{Adde} \quad - \quad x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = a$$

$$\text{Eritque} \quad - \quad 2x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 = a + \frac{b}{a}$$

$$\text{Adeoque} \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}b}{a} = \text{puta } s.$$

{ Subduc $x^4 - x^3y$, &c.

$$\text{ab } x^4 + x^3y, \text{ \&c. eritque, } 2x^3y + 2xy^3 = a - \frac{b}{a}$$

$$\text{Adeoque} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad x^3y + xy^3 = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}b}{a} = \text{puta } d.$$

$$\text{Sive} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (x^2 + y^2)xy = d.$$

{ Sive, positis $xy = z$,

$$\text{Et } x^2 + y^2 = v, \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad zv = d, \text{ adeoq. } z = \frac{d}{v}.$$

$$\text{Cæterum erat} \quad - \quad - \quad - \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = s$$

$$\text{Et } x^2 + y^2 = v, \text{ quadr. dat, } x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = v^2$$

$$\text{Et subducendo} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad x^2y^2 = v^2 - s$$

$$\text{Adeoque} \quad - \quad - \quad \frac{d^2}{v^2} (= z^2 = x^2y^2) = v^2 - s$$

$$\text{Sive.} \quad - \quad - \quad v^4 = sv^2 + d^2.$$

Unde elicietur v et exinde z . Hisce vero inventis innotescant x et y .

$$\text{Nam ob } xy = z, \text{ erit } - \quad 2xy = 2z$$

$$\text{Cæterum fuit } - \quad x^2 + y^2 = v$$

$$\text{Et his additis, } x^2 + 2xy + y^2 = v + 2z$$

$$\text{Et radice extracta, } x + y = \sqrt{v + 2z}$$

$$\text{Erit quoque } - \quad x - y = \sqrt{v - 2z}$$

$$\text{Et his additis, } - \quad 2x = \sqrt{v + 2z} + \sqrt{v - 2z}$$

$$\text{Sive } - \quad - \quad x = \frac{\sqrt{v + 2z} + \sqrt{v - 2z}}{2}$$

$$\text{Et } - \quad - \quad - \quad y = \frac{\sqrt{v + 2z} - \sqrt{v - 2z}}{2}$$

$$\text{EXEMP. Sit } a = 62, b = 1364. \text{ Erit } s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\frac{b}{a} = 42,$$

$$\text{et } d = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\frac{b}{a} = 20. \text{ Adeoque } v^2 = \frac{1}{4}s^2 + d^2 = 50$$

$$= 25 \times 2. \text{ Sit } c^2 = 2, \text{ eritque } v^2 = 25c^2, \text{ et } v = 5c. \text{ Adeoque } \sqrt{v + 2z} = \sqrt{5c + 4c} = \sqrt{9c} = 3\sqrt{c}. \text{ Et } \sqrt{v - 2z} = \sqrt{c}.$$

$$\text{Erit igitur } x = \frac{\sqrt{v + 2z} + \sqrt{v - 2z}}{2} = \frac{3\sqrt{c} + \sqrt{c}}{2} = 2\sqrt{c}$$

$$\text{Et } - \quad y = \sqrt{c}.$$

$$\text{Et proinde } x^2 = 4c, xy = 2c, y^2 = c.$$

$$\text{Et proportionales } x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4$$

$$\text{Evadent } 16c^2, 8c^2, 4c^2, 2c^2, 1c^2$$

$$\text{Sive, } - \quad 32, 16, 8, 4, 2.$$

89. His constare potest quanta sit in solutionum inventionem varietas; et obiter, quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter, si in primas de solutione problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes quantitatum iterum evolvendæ sunt, donec modum quam poteris idoneum et elegantem machinatus fueris.

DE EXTERMINATIONE PLURIUM QUANTITATUM INCOGNITARUM E PLURIBUS ÆQUATIONIBUS.

90. Si duæ quantitates incognitæ è tribus æquationibus tollendæ sunt, aut plures è pluribus; conferendo inter se harum quasque binas, per vices, exterminandi opus per regulas jam ante traditas, gradatim peragetur.

91. Ex tribus pluribusve æquationibus inter se collatis erui quoque possint *formulæ*, ad instar præcedentium, pro exterminanda x , ubi sit unius, duarum, pluriumve dimensionum. Cæterum hæ formulæ ad gradus plane enormes assurgunt, ubi altiores dimensiones x tollendæ sunt. Sic exterminato x ex tribus quadraticis, prodit æquatio 16^{mi} gradus; ex tribus cubicis, 81^{mi} gradus; ex tribus biquadraticis, 256^{mi} gradus; et sic deinceps. Nec huic incommodo satis medetur methodus exterminationis quam invenit *Bezout*, (*supra cit.* § 75) quippe quæ in casibus jam memoratis, ad æquationes 12^{mi} , 49^{mi} , et 156^{mi} gradus respective, deducit.

Solutiones problematum quorundam plures quantitates incognitas parientium afferre jam libet.

P R O B. I.

92. *Diffimiles duarum pluriumve rerum misturas ita componere, ut res illæ commistæ datam inter se rationem acquirant.*

Designent A, B, C, &c. res mistas, et d, e, f, g, h , &c. proportionem earundem in misturis. Sit unius misturæ data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + hB + iC$, et eadem tertiæ $lA + mB + nC$. Sintque

T

hæ mixturæ ita componendæ ut compositionis eadem quantitas contineat $pA + qB + rC$. Finge x , y , et z , partes esse trium misturarum, five numeros esse per quos si tres datæ mixturæ respective multiplicentur earum aggregatum evadet $pA + qB + rC$.

$$\text{Est itaque } \left. \begin{array}{l} dxA + exB + fx C \\ + gyA + byB + ky C \\ + lzA + mzB + nz C \end{array} \right\} = pA + qB + rC.$$

Adeoque, collatis terminis, ob $dxA + gyA + lzA = pA$, atque ita deinceps,

$$\text{Erunt } \left\{ \begin{array}{l} dx + gy + lz = p, \text{ adeoque } x = \frac{p - gy - lz}{d} \\ ex + by + mz = q, \text{ adeoque } x = \frac{q - by - mz}{e} \\ fx + ky + nz = r, \text{ adeoque } x = \frac{r - ky - nz}{f}. \end{array} \right.$$

$$\text{Et rursus sunt } \left\{ \begin{array}{l} \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - by - mz}{e}, \text{ adeoque } y = \frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - db} \\ \frac{q - by - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}, \text{ adeoque } y = \frac{fq - er + enz - fmz}{fb - ek}. \end{array} \right.$$

Et denique, si abbrevientur hi valores y , scribendo α pro $ep - dq$, ϵ pro $dm - el$, γ pro $eg - db$, δ pro $fq - er$, ζ pro $en - fm$, et θ pro $fb - ek$; evadet $\frac{\alpha + \epsilon z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$,

& per reductionem, $z = \frac{\theta \alpha - \gamma \delta}{\gamma \zeta - \epsilon \theta}$. Invento z , pone

$$\frac{\alpha + \epsilon z}{\gamma} = y, \text{ et } \frac{p - gy - lz}{d} = x.$$

EXEMP. Si tres sint metallorum colliquefactorum mixturæ, quarum primæ pondo continet argenti uncias 12,

æris 1, & stanni 3, secundæ pondo continet argenti unciam 1, æris 12, et stanni 3, et tertiæ pondo continet æris uncias 14, stanni 2, et argenti nihil; sintque hæ mixturæ ita componendæ ut pondo compositionis contineat argenti uncias 4, æris 9, et stanni 3: Pro d, e, f ; g, h, k ; l, m, n ; p, q, r , scribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respective, & erit $u (= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$, & $e (= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, & sic $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$, & $\theta = 33$. A-

deoque $z (= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - e\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}) = 0$,

$y (= \frac{\alpha + ez}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}) = \frac{8}{11}$, & $x (= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}) = \frac{3}{11}$. Quare si misceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo

mixturæ secundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ, et nihil tertiæ, aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, et tres stanni. Uti ex eo constat, quod $\frac{3}{11}$

partes pondo primæ $= \frac{3}{11} \times (\frac{12 + 1 + 3}{16}) = \frac{36 + 3 + 9}{176}$.

Et $\frac{8}{11}$ partes secundæ $= \frac{8}{11} \times (\frac{1 + 12 + 3}{16}) = \frac{8 + 96 + 24}{176}$,

et proinde aggregatum $= \frac{44 + 99 + 33}{176} = \frac{4 + 9 + 3}{16}$.

93. Cæterum notandum est quod dissimiles hujusmodi mixturas secundum datam quamlibet rationem componere aliquando impossibile evadet, quando, scil. valores x, y vel z prodeunt negativi; tales enim in quæstionis solutione valores affirmativos tantum postulantis, locum habere nequeunt. Ut si primæ pondo contineat argenti, æris et

stanni 3, 6, et 7 uncias respective, secundæ pondo, 1, 12, et 3 uncias, tertiæ pondo 4, 2 et 10 uncias, et desideretur compositio cujus pondo contineat 4, 9 et 3 uncias: Pro d , e , f , &c. scriptis 3, 6, 7, &c. crit $a = -3$, $e = -18$, $\gamma = -30$, $d = 45$, $\xi = 46$, et $\theta = 66$. Adeoque

$$z = \frac{\theta a - \gamma d}{\gamma \xi - e \theta} = \frac{-198 + 1350}{-1380 + 1188} = \frac{1152}{-192} = -6,$$

$$y = \frac{a + e z}{\gamma} = -\frac{7}{2}, \text{ \& } x = \frac{p - g y - l z}{d} = \frac{4 + \frac{7}{2} + 24}{3}$$

$$= \frac{63}{6} = \frac{21}{2}. \text{ Respiciunt nimirum valores } y \text{ et } z \text{ jam ne-}$$

gativi ad quæstionis casum in praxi impossibilem, nempe *Diffimiles rerum misturas ita ab invicem secernere, ut residuum res illas datâ quadam ratione inter se commistas exhibeat*. Sic in hoc exemplo, si a $10\frac{1}{2}$ pondo misturæ primæ demantur $3\frac{1}{2}$ pondo secundæ et 6 pondo tertiæ, residuum erit pondo continens argenti æris et stanni 4, 9 & 3 uncias respective.

P R O B. II.

94. *Invenire valores x, y et z in æquationibus $x^2 + xy = 10$, $y^2 + yz = 21$, et $z^2 + zx = 24$.*

Substituatur nx pro y , et mx pro z , eritque

$$\left. \begin{aligned} x^2 + nx^2 &= 10, \\ n^2 x^2 + nm x^2 &= 21, \\ m^2 x^2 + mx^2 &= 24, \end{aligned} \right\} \text{ five } \begin{cases} x^2 = \frac{10}{1+n} \\ x^2 = \frac{21}{n^2+nm} \\ x^2 = \frac{24}{m^2+m} \end{cases}$$

Adeoq. $\frac{24}{m^2+m} (=x^2) = \frac{10}{1+n}$, ergo $n = \frac{5m \cdot \overline{m+1} - 12}{12}$.

Itemq. $\frac{24}{m^2+m} (=x^2) = \frac{21}{n^2+nm}$, ergo $8n^2 + 8nm = 7m \cdot \overline{m+1}$.

Sed $n^2 = \frac{25m^2 \cdot \overline{m+1}^2 - 120m \cdot \overline{m+1} + 144}{144}$.

Et $nm = \frac{5m^2 \cdot \overline{m+1} - 12m}{12}$.

Adeoq. $7m \cdot \overline{m+1} (=8n^2 + 8nm) = \frac{25m^2 \cdot \overline{m+1}^2 - 120m \cdot \overline{m+1} + 144}{18} + \frac{10m^2 \cdot \overline{m+1} - 24m}{3}$.

Sive concinnando, $25m^4 + 110m^3 - 161m^2 - 390m + 144 = 0$.

Et divid. per $m-2$, $25m^3 + 160m^2 + 159m - 72 = 0$.

Unde per resolutionem, prodit $m = 2$.

Adeoq. $n (= \frac{10 \cdot 3 - 12}{12}) = \frac{3}{2}$, $x (= \sqrt{\frac{10}{1+\frac{1}{2}}}) = 2$, $y = 3$,

et $z = 4$.

P R O B. III.

95. Si boves *a* depascent pratum *b* in tempore *c*; & boves *d* depascent pratum æque bonum *e* in tempore *f*, & gramen uniformiter crescat: Quæritur quot boves depascent pratum simile *g*, in tempore *h*.

Distinguantur boves cujusque prati binos in classes; sint boves $a = r + s$, quorum boves r depascent gramen quod in prato *b* ante boves admissos creverat, boves autem s graminis incrementum post. Similiter, sint boves $d = t + u$. Et boves quæsti $x = y + z$. Sed boves prioris classis r , t , et y , dato tempore, sunt ut prata depascenda, (quippe quæ per hypothesin æque bona sunt) et datis pratis, reciproce ut

depascendi tempora, et proinde neutris datis, ut prata directe et depascendi tempora reciproce, hoc est, ut $\frac{b}{c}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ respective. Adeoque per analogiam, $r : t :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$, et ductis mediis et extremis $\frac{tb}{c} = \frac{er}{f}$, adeoque $t = \frac{cer}{bf}$. Et similiter, $y = \frac{cgr}{bh}$. Sunt quoque boves posterioris classis s , u , z & tempora depascendi conjunctim, ut prata b , e , g et tempora graminis in hisce crescendi (uniformiter per hypothesin) conjunctim; sive, æquipollentibus his temporibus, boves s , u , z ut prata b , e , g respective. Adeoque, per analogiam, boves $u = \frac{es}{b}$, et $z = \frac{gs}{b}$. Substituantur in æquationem secundam et tertiam valores t , y , u , et z jam inventi, et prodibunt

$$a = r + s, \text{ adeoque } r = a - s.$$

$$d = \frac{cer}{bf} + \frac{es}{b} = \frac{ce \times a - s}{bf} + \frac{es}{b}, \text{ adeoque } s = \frac{bdf - cea}{ef - ce}.$$

$$x = \frac{cgr}{bh} + \frac{gs}{b} = \frac{cg \times a - s}{bh} + \frac{gs}{b}, \text{ adeoque } s = \frac{bhx}{gb} - \frac{cga}{cg}.$$

$$\frac{bhx - cga}{gb - cg} (= s) = \frac{bdf - cea}{ef - ce}, \text{ adeoque}$$

$$befbx - bcebx = bdfgb - acegb - bcdfg + acefg$$

$$\text{Sive } - - x = \frac{bdfgb - acegb - bcdfg + acefg}{befb - bceb}.$$

96. Longe elegantius, at subtilius quidem, solutionem expedit *Newtonus*. Primo enim, exquirat quot boves in tempore b depascerent graminis incrementum in prato e per tempus c ; deinde, quot boves in eodem tempore b depascerent graminis incrementum in eodem prato e per tempus

$b - c$; nam ex horum summa conflatur totus numerus bouum quibus per tempus b pascendis sufficeret totum graminis incrementum in hoc prato e per tempus b . Et inde per analogiam, colligit quot boves depascere pratum g in eodem tempore b . Hoc præmissis, ipsius solutionem, notulis quibusdam subjectis proferre jam libet.

Si boves a in tempore c depascant pratum b ; tum per analogiam, boves $\frac{e}{b} a$ in eodem tempore c (a), vel boves $\frac{ec}{bf} a$ in tempore f (b), vel boves $\frac{eca}{bb} a$ in tempore b , depascant pratum e : puta si gramen post tempus c non cresceret. Sed cum propter graminis incrementum boves d in tempore f depascant solummodo pratum e , ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f - c$ tantum erit quantum per se sufficit pascendis bobus $d - \frac{eca}{bf}$ per tempus f , hoc est quantum sufficit pascendis bobus $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bb}$ per tempus b (c). Et in tempore $b - c$ per analogiam

(a) $b : e :: a : \frac{ea}{b}$ ob boves ut prata, dato graminis incremento per tempus c .

(b) $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{c} : \frac{1}{f} :: \frac{ea}{b} : \frac{eca}{bf} \\ \frac{1}{c} : \frac{1}{b} :: \frac{ea}{b} : \frac{eca}{bb} \end{array} \right\}$ ob boves reciproce ut tempora depascendi pratum datum e , dato graminis incremento per tempus c .

(c) $\frac{1}{f} : \frac{1}{b} :: d - \frac{eca}{bf} : \frac{fd}{b} - \frac{feca}{bf b}$ seu $\frac{fd}{b} - \frac{eca}{bb}$ ob boves dato graminis incremento per tempus $f - c$, reciproce ut depascendi tempora.

tantum erit incrementum quantum per se sufficit pascendis
 bobus $\frac{b-c}{f-c}$ in $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bh}$, five $\frac{bdfb - ecab - bdcf + aec^2}{bfh - bcb}$ (d)

[per tempus b .] Hoc incrementum adijce bobus $\frac{acc}{fb}$ et

prodibit $\frac{bdfb - ecab - bdcf + ecfa}{bfh - bcb}$ numerus boum quibus

pascendis sufficit pratum e per tempus b . Adeoque per

analogiam, pratum g bobus $\frac{bdfgb - ecagb - bdcgf + ecfga}{bfh - bcb}$

per idem tempus b pascendis sufficiet.

EXEMP. Si 12 boves depascant $3\frac{1}{2}$ jugera prati in 4 septimanis; & 21 boves depascant 10 jugera consimilis prati in 9 septimanis; quæritur quot boves depascant 24 jugera in 18 septimanis? Resp. 36. Iste enim numerus invenietur substituendo in $\frac{bdfgb - ecagb - bdcgf + ecfga}{bfh - bcb}$ numeros 12, $3\frac{1}{2}$, 4, 21, 10, 9, 24, et 18, pro literis a, b, c, d, e, f, g et b respective.

Cæterum solutio forte haud minus expedita erit si è primis principiis ad formam solutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote si 12 boves in 4 septimanis depascant $3\frac{1}{2}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 septimanis vel 16 boves in 9 septimanis vel 8 boves in 18 septimanis depascent 10 jugera: puta si gramen non cresceret. Sed

$$(d) \quad f-c : b-c :: \frac{df}{b} - \frac{eca}{bh} \text{ seu } \frac{bdf - eca}{bh} : \frac{bdfb - ecab - bdcf + aec^2}{bfh - bcb}$$

ob boves ut graminis incrementa in prato e per tempora $f-c$ et $b-c$.

cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis depascant solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanis incrementum tantum erit quantum per se sufficit excessui boum 21 supra 16, hoc est 5 bobus per 9 septimanas, vel quod perinde est $\frac{5}{2}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incrementum illud per analogiam tantum erit quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept. ad 14 septimanas ut $\frac{5}{2}$ boves ad 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas adde hocce 7 boves quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, et summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficient, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus.

In priore solutione literali septem adsciscuntur quantitates incognitæ, in posteriore ne una quidem. Luculenter profectò evincit hoc exemplum non semper ad Algebram necessario recurrendum esse in problematum solutionem quæ primâ fronte difficillima videantur. Verùm *Newtoni* sagacitas haud cuique *Analystæ* contingit.

DE EXTERMINATIONE QUANTITATUM SURDARUM EX ÆQUATIONIBUS.

97. Tollendæ sunt surdæ quadraticæ ex æquatione qualibet haud plures quam quatuor terminos complectente, five hi omnes sint irrationales five non, per involutionem iteratam, ope Regulæ VI, § 25. Sic æquatio $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d} = 0$, (ubi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, &c. quantitates quascun-

que furdas designant five simplices five complexas) transponendo, dat $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$; et quadrando, $a - 2\sqrt{ab} + b = c + 2\sqrt{cd} + d$; atque iterum transponendo, $2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} = a + b - c - d =$ puta g ; & partibus iterum quadratis, $4ab + 8\sqrt{abcd} + 4cd = g^2$; atque denuo transponendo, $\sqrt{abcd} = \frac{g^2 - 4ab - 4cd}{8} =$ puta b ;

partibus autem denuo quadratis emergit æquatio quatuor dimensionum a furdis libera, $abcd = b^2$. Verum si datæ æquationi subquadraticæ accedat terminus quintus, five hic sit rationalis five non, amovendæ ex æquatione asymmetriæ impar erit hæc regula utcunque distribuas terminos. Nam ex unâ æquationis parte necessario sistentur tres, quatuor, aut quinque termini, adeoque ex alterâ duo, unus, aut nullus, respective; at furda quantitas binomia quadrando parit unum terminum irrationalem, (ut in exemplo allato) trinomia parit tres, quadrinomia sex, et quinquinomia decem: ergo ex involutione partium quotiescunque iteratâ provenient termini furdi numero plures quam quatuor, vel saltem non pauciores, in isto casu ubi quatuor terminis furdis accedit quintus terminus qui sit rationalis. Minus itaque valét hæc regula ad furdarum quadraticarum in omni casu exterminationem, licet harum genus sit simplicissimum. Et a fortiori, intra limites adhuc arctiores concludetur furdarum cubicarum exterminatio.

98. Cæterum quantitates *quotcunque* furdas ex æquationibus tollere licet ope methodi *Fermatianæ*, eas nempe fingendo literis quibuscunque æquales; deinde, ex æquationibus resultantibus tollendo gradatim has literas, per regulas præcedentes, emerget tandem æquatio libera ab omni asymmetria. Quomadmodum si sit $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, scribendo t pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{a^2 - ay}$, et x pro $\sqrt[3]{ay^2}$, ha-

bentur quatuor æquationes $t - v = 2a + x$, $t^2 = ay$,
 $v^2 = a^2 - ay$, et $x^3 = ay^2$. Sed per primam æquationem,

$$\text{Erit } - - - - - 2a + x + v = t$$

$$\text{Et } - 4a^2 + 4ax + 4av + x^2 + 2xv + v^2 = (t^2 =) ay$$

Adeoquæ, substituendo $a^2 - ay$ pro v^2 , et transponendo,

$$x^2 + 4ax - 2ay + 5a^2 = - 2xv - 4av$$

$$\text{Adeoquæ } - - - \frac{x^2 + 4ax - 2ay + 5a^2}{2x + 4a} = - v.$$

$$\text{Et } \frac{x^4 + 8ax^3 - 4ayx^2 + 26a^2x^2 - 16a^2yx + 40a^3x + 4a^2y^2 - 20a^3y + 25a^4}{4x^2 + 16ax + 16a^2}$$

$$= (v^2 =) a^2 - ay. \text{ Unde substituendo } ay^2x \text{ pro } x^4, 8a^2y^2 \text{ pro } 8ax^3,$$

et concinnando, evadit

$$22ax^2 + y^2x + 24a^2x + 12ay^2 - 4a^2y + 9a^3 = 0.$$

Sive, abbreviandi gratiâ scribendo

A pro $22a$, B pro $y^2 + 24a^2$, et C pro $12ay^2 - 4a^2y + 9a^3$,

$$\text{Erit } - - - - - Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$\text{Adeoquæ } - - - - - Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0$$

$$\text{Sed } x^3 - ay^2 = 0, \therefore Ax^3 - Aay^2 = 0$$

$$* Bx^2 + Cx + Aay^2 = 0.$$

$$ABx^2 + B^2x + BC = 0 \quad A^2ay^2x^2 + ABay^2x + ACay^2 = 0$$

$$ABx^2 + ACx + A^2ay^2 = 0 \quad BCx^2 + C^2x + ACay^2 = 0$$

$$* (B^2 - AC)x + BC - A^2ay^2 = 0 \quad (BC - A^2ay^2)x + C^2 - ABay^2 = 0$$

$$(B^2 - AC)(BC - A^2ay^2)x + (BC - A^2ay^2)^2 = 0$$

$$(B^2 - AC)(BC - A^2ay^2)x + (B^2 - AC)(C^2 - ABay^2) = 0$$

$$* (BC - A^2ay^2)^2 - (B^2 - AC)(C^2 - ABay^2) = 0$$

$$\text{Sive } A^3a^2y^4 + B^3ay^2 + C^3 - 3ABCay^2 = 0.$$

Unde substituendo valores A, B, et C, et dividendo per a ,
 prodit æquatio a furdis expurgata

$$y^8 + 1008a^2y^6 - 1464a^3y^5 - 2762a^4y^4 + 3680a^5y^3 + 2916a^6y^2 - 972a^7y + 729a^8 = 0$$

DE PROBLEMATIS INDETERMINATIS.

99. Hactenus prolatae sunt quaestiones quae tot pariunt æquationes quot habent quantitates incognitas, et quæ idcirco, ad solutionem determinatam seu certam perducunt. Quaestiones jam apponemus quæ conditionum inopia laborantes, pauciores præbent æquationes quam quantitates incognitas, atque solutionem indeterminatam seu incertam fortiuntur.

P R O B. I.

100. *Datis et misturæ et mistorum gravitatibus specificis, invenire proportionem mistorum inter se.*

Sint x et y mistorum moles, a et b horum gravitates specificæ, & e gravitas specifica misturæ, et cum gravitas absoluta seu pondus componatur ex mole corporis et gravitate specifica, erit ax pondus prioris, by pondus posterioris, et $e \times x + y$ pondus misturæ; adeoque $ax + by = ex + ey$, et transponendo, $ax - ex = ey - by$, five $\overline{a - e} \times x = \overline{e - b} \times y$, indeque $x : y :: e - b : a - e$. Sed cognita jam proportionem molium x et y inter se, et gravitatum specificarum a et b , componendo innotescet proportio ponderum mistorum inter se.

EXEMPL. Sit a auri gravitas experimentis hydrostaticis comperta ut 19, b argenti gravitas ut $10\frac{1}{2}$, et e Coronæ Hieronis ut 17. Eritque moles auri in corona ad molem argenti, ut $(e - b : a - e :: 17 - 10\frac{1}{2} :: 19 - 17 :: 6\frac{3}{4} : 2 :: 20 : 6 ::) 10$ ad 3; adeoque, pondus auri in corona ad

pondus argenti, ut $(a \times \overline{e-b} : b \times \overline{a-e} :: 19 \times 10 : 10\frac{1}{2} \times 3 ::) 190 : 31$; et pondus coronæ ad pondus argenti, ut $190 + 31 = 221$ ad 31. Innotescit igitur proportio ponderum coronæ et mistorum inter se. Cæterum quo eruantur ipsa mistorum pondera, et quæstio determinata sit, postulatur altera conditio, nempe ut innotescat coronæ pondus, de hoc vero filet *Vitruvius*, *loc. cit.* § 12.

Si mistura præter aurum et argentum, aliud quodvis metallum colliquefactum contineret, etiam si daretur coronæ pondus, ipsa mistorum pondera neutiquam detexisset *Archimedes*, ut ex seq. *prob.* patebit.

P R O B. II.

101. *Datis mistura ex tribus metallis conflata pondere, et mistorum gravitatibus specificis, invenire proportionem mistorum inter se.*

Sint x, y, z , mistorum puta auri, argenti et æris moles; a, b, c horum gravitates specificæ respective; mistura autem gravitas specifica g , et pondus p : & inde duæ habentur æquationes $ax + by + cz = p$, et $ax + by + cz = g \times x + y + z$; ex priorè autem elicitur $x = \frac{p - by - cz}{a}$

& hoc valore x in alteram substituto, concinnando prodit $y = \frac{agz - cgz + gp - ap}{bg - ag}$. Quoniam igitur valoribus x et y immiscetur z , hoc incognito, illi determinari nequeunt.

102. Sufficiant hæc in specimen solutionum problematum hujusmodi indeterminatorum. Pergamus jam methodum generalem solvendi problemata de numeris integris & affirmativis docere, quam invenit summus analysta *De Moivre*. Vide *Dodson's Math. Repos.* Vol. 2.

P R O B. I.

103. *Quærantur valores integri et affirmativi x et y in æquatione* $9x - 7y = 13$.

Transp. erit $7y = 9x - 13$

Adeoquæ - $y = \frac{9x - 13}{7} = x - 1 + \frac{2x - 6}{7}$ (quod patet dividendo $9x - 13$ per 7). Si igitur ex hoc valore y , per quæstionem integro, dematur maximus integer quem sub se continet scilicet quotiens $x - 1$, erit residuum $\frac{2x - 6}{7}$ integer. Finge hoc æquari a , et inde erit $2x - 6$

$= 7a$, et $x = \frac{7a + 6}{2} = 3a + 3 + \frac{a}{2}$. Sed hic valor x est quoque integer, ab hoc igitur dempto maximo integro $3a + 3$, erit residuum $\frac{a}{2}$ integer = puta b , et inde $a = 2b$.

Comparato jam valore integro a absque residuo, regrediendo substituatur $2b$ pro a in valorem præcedentem x , et prodibit $x = \frac{7 \times 2b + 6}{2} = \frac{14b + 6}{2} = 7b + 3$,

et - $y = \frac{9 \times 7b + 3 - 13}{7} = \frac{9 \times 7b + 14}{7} = 9b + 2$.

In hisce autem valoribus x et y , designare b potest aut zero, aut integrum quemlibet majorem zero, sic enim affirmativi exurgent horum valores, secus si minorem zero. Sit igitur

$b = 0$, erit $x = 0 + 3 = 3$, et $y = 0 + 2 = 2$

$b = 1$, $x = 7 + 3 = 10$, - $y = 9 + 2 = 11$

$b = 2$, - $x = 14 + 3 = 17$, - $y = 18 + 2 = 20$,

&c.

&c.

&c.

Hinc in hujusmodi æquationibus $fx - gy = b$, innumeri prodibunt quantitatum incognitarum valores, crescente x per coefficientem y et crescente y per coefficientem x , in infinitum.

P R O B. II.

104. Valente nummo quodam anglico 21 solidos, gallico autem 17 solidos, quot utriusque 100 libras sterlingas persolvent; sive in genere, quærentur valores integri et affirmativi x et y in æquatione $21x + 17y = 100 \times 20 = 2000$.

$$21x + 17y = 2000$$

Transp. et divid. erit $y = \frac{2000 - 21x}{17} = 117 - x + \frac{11 - 4x}{17}$

Sit $a = \frac{11 - 4x}{17}$, adeoq. $x = \frac{11 - 17a}{4} = 2 - 4a + \frac{3 - a}{4}$

Sit $b = \frac{3 - a}{4}$, adeoq. $a = 3 - 4b$.

Substituatur jam hic valor integer a residuo vacans, in valorem x , et evadet

$$x = \frac{11 - 17 \times 3 - 4b}{4} = 17b - 10, \text{ et } y = \frac{2000 - 21 \times 17b - 10}{17} = 130 - 21b.$$

Cæterum quo $17b - 10 (= x)$ evadat affirmativus, statuendus est b major nihilo, et quo $130 - 21b (= y)$ evadat affirmativus, limitem $\frac{130}{21} = 6 \frac{4}{21}$ haud transcendere debet. Sortietur igitur b sex valores integros, scil.

$$\begin{aligned} b &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ \text{Adeoq. } \begin{cases} x &= 7, 24, 41, 58, 75, 92, \\ y &= 109, 88, 67, 46, 25, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Hinc in æquationibus formæ $fx + gy = b$, intra certos limites concludentur valores affirmativi x et y , crescente x per coefficientem y et decrecente y per coefficientem x .

P R O B. III.

105. Quærantur valores integri et affirmativi x et y in æquatione $5x + 8y = 1989$.

Transponendo et dividendo erit $x = \frac{1989 - 8y}{5}$, at hic valor x per quæstionem debet esse integer, unde pergendo secundum methodum *Moiwreanam* in præcedentibus adhibitam, erui potest solutio.

106. Citius autem methodo insequenti integrum quem quærimus residuo vacantem eruere licet, quam idcirco in posterum usurpabimus. Sumantur multipli denominatoris 5 terminis numeratoris 1989 et 8y proximi, five supra five infra fuerint, scilicet 1990 et 10y, eritque $\frac{1990 - 10y}{5}$ integer, adeoque differentia quoque $\frac{1 - 2y}{5}$ integer, = puta a , et inde evadet $y = \frac{1 - 5a}{2}$. Similiter, ab hujus numeratore dematur multiplus proximus denominatoris 2, scil. 4a, eritque $\frac{1 - a}{2}$ integer = puta b , unde evadet $a = 1 - 2b$.

$$\text{Prodibit igitur } \begin{cases} y = \frac{1 - 5 \times \overline{1 - 2b}}{2} = 5b - 2, \\ \text{et } x = \frac{1989 - 8 \times \overline{5b - 2}}{5} = 401 - 8b. \end{cases}$$

Adeoque ob $5b - 2 (= y)$ affirmativum, necesse est ut b fit major nihilo, at non transcendere debet limitem $\frac{401}{8} = 50\frac{1}{8}$, sic enim negativus evaderet $401 - 8b (= x)$. Sortietur itaque b valores integros 50, totidemque x et y , scil.

$$\begin{aligned} b &= 1, & 2, & 3, & \&c. & 50, \\ x &= 393, & 385, & 377, & \&c. & 1, \\ y &= 3, & 8, & 13, & \&c. & 248. \end{aligned}$$

107. Cæterum notandum est in æquationibus formæ $fx + gy = b$, quo valores x et y emergant integri, necesse est ut coefficientes f et g sint ad se invicem primi, aliter enim dividendo per maximum horum divisorem communem, terminus absolutus b evadere potest fractionalis, ac idcirco solutio in numeris integris impossibilis. Sic habita æquatione $6x + 9y = 17$, dividendo per 3 erit $2x + 3y = 5\frac{1}{3}$.

Aliquando contractius solvi possunt hujusmodi æquationes.

108. Sic proposita æquatione $5x + 8y = 152$, ubi coefficientium alter scilicet 8 fit divisor termini absoluti 152, erit

$$5x = (152 - 8y) \overline{19 - y} \times 8$$

Adeoque $x : 19 - y :: 8 : 5$.

Erit igitur $x = 8, 16, 24, \&c.$

$$19 - y = 5, 10, 15, \&c.$$

Adeoque $y = 14, 9, 4$.

109. Proposita æquatione $5x + 8y = 91 = 13 \times 7$, ubi summa coefficientium fit termini absoluti divisor, manifestum est utramque quantitatem incognitam designari posse

per quatum 7, et inde ex lege incrementi et decrementi
prodeunt utriusque valores,

$$\begin{cases} x = 7, 15 \\ y = 7, 2. \end{cases}$$

Aut proposita æquatione $5x - 8y = 81 = 27 \times 3$, ubi differentia coefficientium fit termini absoluti divisor, manifestum est x et y designari posse per quatum 27, et inde facile habentur reliqui utriusque valores.

110. Proposita æquatione $5x + 8y = 198$, ubi differentia coefficientium fit termini absoluti divisor, finge $x + y = s$, adeoque $5x + 5y = 5s$ et $8x + 8y = 8s$. Sed differentia inter hæc et datam dabunt

$$\begin{cases} 3y = 198 - 5s, & \text{adeoque erit } s < \frac{198}{5} = 39 \frac{3}{5} \\ 3x = 8s - 198, & \text{adeoque erit } s > \frac{198}{8} = 24 \frac{6}{8}. \end{cases}$$

Consistere igitur debet s inter limites $39 \frac{3}{5}$ et $24 \frac{6}{8}$, et quoniam $y = \frac{198 - 5s}{3}$ et $x = \frac{8s - 198}{3}$, quo integri eruantur utriusque valores, debet insuper s esse ex multiplis denominatoris 3. Erunt igitur,

$$\begin{aligned} s &= 27, 30, 33, 36, 39, \\ x &= 6, 14, 22, 30, 38, \\ y &= 21, 16, 11, 6, 1. \end{aligned}$$

P R O B. IV.

III. *Valentibus nummis aureis quibusdam 18½ solidos, 22½ sol. et 29½ sol. respective, quot cujusque classis sumendi ut omnium summa sit 1000, valor autem 1000l. Sive, designantibus x, y, et z nummos cujusque classis quæsitos, invenire valores horum integros et affirmativos in æquationibus $x + y + z = 1000$, et $73x + 91y + 117z = 80,000$.*

Nam multiplicando æquationem $x + y + z = 1000$, successive per 73 & 117,

$$\text{erunt } \begin{cases} 73x + 73y + 73z = 73000 \\ 117x + 117y + 117z = 117000 \end{cases}$$

Deinde subducendo priorem ab æquatione $73x + 91y + 117z = 80,000$, & hanc a posteriore,

$$\text{erunt } \begin{cases} 18y + 44z = 7000 \\ 44x + 26y = 37000 \end{cases}$$

$$\text{five } \begin{cases} 9y + 22z = 3500, \text{ adeoq. } y = \frac{3500 - 22z}{9} \text{ et } z = \frac{3500 - 9y}{22} \\ 22x + 13y = 18500, - y = \frac{18500 - 22x}{13}. \end{cases}$$

Sed $\frac{3500 - 22z}{9}$ ($= y$) debet esse int. est autem $\frac{3501 - 18z}{9}$ int.

adeoq. diff. $\frac{4z + 1}{9} = a$ int. adeoq. $z = \frac{9a - 1}{4}$. Similiter,

erit differ. $\frac{a - 1}{4} = b$ int. adeoq. $a = 4b + 1$, adeoq. substit.

$$z = \frac{36b + 8}{4} = 9b + 2. \text{ Itemque}$$

$\frac{18500-22x}{13} (=y)$ debet esse int. est autem $\frac{18499-26x}{13}$ int.

adeoq. diff. $\frac{4x+1}{13} = c$ int. adeoq. $x = \frac{13c-1}{4}$. Et rursus

erit differ. $\frac{c-1}{4} = d$ integer, $\therefore c = 4d + 1$, et substit.

$$x = \frac{52d+12}{4} = 13d + 3. \text{ Itemque}$$

$\frac{3500-9y}{22} (=z)$ debet esse int. est autem $\frac{3498}{22}$ int. adeoque

$$\frac{9y-2}{22} = e \text{ int. adeoque } y = \frac{22e+2}{9}, \text{ adeoque}$$

$$\frac{4e+2}{9} = f \text{ int. adeoque } e = \frac{9f-2}{4}, \text{ adeoque}$$

$$\frac{f-2}{4} = g \text{ integer, adeoque } f = 4g + 2, \text{ et}$$

$$e = \frac{36g+16}{4} = 9g + 4, \text{ adeoque}$$

$$y = \frac{22 \times 9g + 4 + 2}{9} = 22g + 10.$$

Investigatis jam valoribus z , x , et y in terminis b , d , et g respective; ob $9b + 2 = z$, manifestum est quod b designare potest aut zero aut integrum quemlibet affirmativum: quod perinde quoque verum erit de d et g . Hisce autem inter se collatis, eruentur limites quidam valorum affirmativorum b , d , et g .

$$\text{Nam, } 22g + 10 (=y) = \frac{3500 - 22 \times \overline{9b+2}}{9} = 384 - 22b.$$

$$\text{Adeoq. } 22g + 22b = 374.$$

Sive $- g + b = 17$. Et proinde b et g excedere nequeunt 17 respective.

$$\text{Itemque } 22g + 10 = \frac{18500 - 22 \times \overline{13d+3}}{13} = 1418 - 22d,$$

Adeoq. $- g + d = 64$. Unde d nequit esse major quam 64 nec minor quam 47.

Erit igitur $b=0, 1, \&c. 17$, adeoq. $z=2, 11, \&c. 155$,
 $g=17, 16, \&c. 0$, - $y=384, 362, \&c. 10$,
 $d=47, 48, \&c. 64$, - $x=614, 627, \&c. 835$.

P R O B. V.

112. *Invenire valores integros et affirmativos x, y, et z in æquatione $17x + 19y + 21z = 400$.*

Erit $x = \frac{400 - 19y - 21z}{17}$ int. fed $\frac{408 - 17y - 17z}{17}$ est int.

$\therefore$ differ. $\frac{8 + 2y + 4z}{17}$ integer = a ,

adeoq. $y = \frac{17a - 4z - 8}{2}$ int. $\therefore \frac{a}{2}$ int. = b , $\therefore a = 2b$.

Unde substituendo,

erit $y = \frac{17 \times 2b - 4z - 8}{2} = 17b - 2z - 4$,

et $x = \frac{400 - 19 \times \frac{17b - 2z - 4}{2} - 21z}{17} = 28 + z - 19b$.

In hisce valoribus y et x , definiendi sunt z et b . Quo determinentur igitur limites z , observandum est, quod z nequit esse minor unitate, et si pro x et y substituatur in æquationem datam minimus utriusque valor scilicet 1, evadet $z = \frac{400 - 17 - 19}{21} = 17\frac{7}{21}$, et proinde nequit esse major quam 17.

Sit nunc $z = 1$, evadet $y = 17b - 6$, et $x = 29 - 19b$. At b nequit esse zero aut negativus, sic enim prodiret negativus valor y ; neque transcendere potest $\frac{29}{19} = 1\frac{10}{19}$, sic

enim foret x negativus. Unicus igitur valor b erit 1, et in hoc casu $y = 17 - 6 = 11$, et $x = 29 - 19 = 10$. Similiter, sit $z = 2, 3, 4, 5, 6$ successive, erit ut ante 1, unus valor qui dabit y et x affirmativos, et in his casibus erit $y = 9, 7, 5, 3, 1$, et $x = 11, 12, 13, 14, 15$, respective.

Sit $z = 7, 8, 9, 10$ successive, nullum fortietur valorem b , qui non dabit y et x negativum, et inde rejiciendi sunt hi valores z .

Sit z autem $= 11, 12, 13, 14$, posito $b = 2$, evadet $y = 8, 6, 4, 2$, et $x = 1, 2, 3, 4$ respective. Reliqui valores z scilicet 15, 16, 17, perinde rejiciendi sunt. Restant igitur decem valores integri et affirmativi x, y , et z , scil.

$$z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14,$$

$$y = 11, 9, 7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2,$$

$$x = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1, 2, 3, 4.$$

P R O B. VI.

113. *Invenire valores integros et affirmativos x, y , et z in æquatione $5x + 7y + 11z = 224$.*

$$\text{Erit } x = \frac{224 - 7y - 11z}{5} \text{ int. fed, } \frac{225 - 5y - 10z}{5} \text{ est int.}$$

$$\therefore \frac{1 + 2y + z}{5} = a \text{ integer,}$$

$$\text{adeoq. } y = \frac{5a - z - 1}{2} \therefore \frac{a - z - 1}{2} = b \text{ integer,}$$

$$\text{et } a = 2b + z + 1. \text{ Unde substit.}$$

$$\text{erit } y = \frac{5 \times 2b + z + 1 - z - 1}{2} = 5b + z + 2,$$

$$\text{Et } x = \frac{224 - 7 \times 5b + z + 2 - 11z}{5} = 42 - 7b - 5z.$$

Cæterum z nequit esse minor unitate, nec major quam $\frac{224-5-7}{11} = 18\frac{4}{11}$, adeoque limites 1 et 18 haud transgredietur, fit

$z = 1$,	$y = 5b + 4$,	$x = 37 - 7b$,	adeoq. $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$,
$z = 2$,	$y = 5b + 6$,	$x = 32 - 7b$,	$b = -1, 0, 1, 2, 3, 4$,
$z = 3$,	$y = 5b + 8$,	$x = 27 - 7b$,	$b = -1, 0, 1, 2, 3$,
$z = 4$,	$y = 5b + 10$,	$x = 22 - 7b$,	$b = -1, 0, 1, 2, 3$,
$z = 5$,	$y = 5b + 12$,	$x = 17 - 7b$,	$b = -2, -1, 0, 1, 2$,
$z = 6$,	$y = 5b + 14$,	$x = 12 - 7b$,	$b = -2, -1, 0, 1$,
$z = 7$,	$y = 5b + 16$,	$x = 7 - 7b$,	$b = -3, -2, -1, 0$,
$z = 8$,	$y = 5b + 18$,	$x = 2 - 7b$,	$b = -3, -2, -1, 0$,
$z = 9$,	$y = 5b + 20$,	$x = -3 - 7b$,	$b = -3, -2, -1$,
$z = 10$,	$y = 5b + 22$,	$x = -8 - 7b$,	$b = -4, -3, -2$,
$z = 11$,	$y = 5b + 24$,	$x = -13 - 7b$,	$b = -4, -3, -2$,
$z = 12$,	$y = 5b + 26$,	$x = -18 - 7b$,	$b = -5, -4, -3$,
$z = 13$,	$y = 5b + 28$,	$x = -23 - 7b$,	$b = -5, -4$,
$z = 14$,	$y = 5b + 30$,	$x = -28 - 7b$,	$b = -5$,
$z = 15$,	$y = 5b + 32$,	$x = -33 - 7b$,	$b = -6, -5$,
$z = 16$,	$y = 5b + 34$,	$x = -38 - 7b$,	$b = -6$,
$z = 17$,	$y = 5b + 36$,	$x = -43 - 7b$,	$b = -7$,
$z = 18$,	$y = 5b + 38$,	$x = -48 - 7b$,	$b = -7$.

Dantur itaque 59 valores b , quibus substitutis totidem prodeunt valores integri et affirmativi y et x , scil.

$z = 1$,	$y = 4, 9, 14, 19, 24, 29$,	$x = 37, 30, 23, 16, 9, 2$,
$z = 2$,	$y = 1, 6, 11, 16, 21, 26$,	$x = 39, 32, 25, 18, 11, 4$,
$z = 3$,	$y = 3, 8, 13, 18, 23$,	$x = 34, 27, 20, 13, 6$,
&c.	&c.	&c.
$z = 18$,	$y = 3$,	$x = 1$.

P R O B. VII.

114. *Quot modis erogare licet 1000l. adhibitis solummodo nummis 5 solidorum, 21 sol. et 27 sol. respective. Seu quaeruntur omnes valores possibiles x, y, et z in aequatione $5x + 21y + 27z = 20,000$.*

$$\text{Erit } x = \frac{20,000 - 21y - 27z}{5} \therefore \frac{y + 2z}{5} = a \text{ int. et } y = 5a - 2z,$$

$$\text{et } x = \frac{20,000 - 21 \times 5a - 27z}{5} = 4000 - 21a + 3z.$$

Cæterum non postulat quaestio x, y, et z in omni casu simul esse adhibendos, potest igitur horum quivis evadere zero, unde erit minimus valor $z = 0$, et maximus valor, evanescentibus scilicet x et y, $\frac{20,000}{27} = 740$. His cognitis, innotescunt limites a, nam

$$5a - 2z \begin{cases} \text{si } z = 0 \\ \text{si } z = 740 \end{cases} = 5a, \text{ unde prodit minor limes } a = 1 \\ = 5a - 1480, \text{ et major limes } a = \\ = \frac{1480}{5} = 296.$$

valores z.

Sit $a = 1$,	erit $y = 5 - 2z$,	et $x = 3979 + 3z$,	3	scil. 0, 1, 2,
$a = 2$,	$y = 10 - 2z$,	$x = 3958 + 3z$,	6	0, 1, 2, 3, 4, 5,
$a = 3$,	$y = 15 - 2z$,	$x = 3937 + 3z$,	8	0, 1, &c.
$a = 4$,	$y = 20 - 2z$,	$x = 3916 + 3z$,	11	0, 1, &c.
$a = 5$,	$y = 25 - 2z$,	$x = 3895 + 3z$,	13	0, 1, &c.
&c.	&c.	&c.		

Manifestum est quod valores z restringuntur tantum per seriem valorum y donec numerus absolutus in serie valorum x decrecendo evaserit negativus, quod fiet post terminum progressionis $\frac{3979}{21} + 1 = 190$. Sit

				valores z .
$a = 189$	$y = 945 - 2z$	$x = 31 + 3z$		473
$a = 190$	$y = 950 - 2z$	$x = 10 + 3z$		476
$a = 191$	$y = 955 - 2z$	$x = -11 + 3z$	$477 - 3 =$	474
$a = 192$	$y = 960 - 2z$	$x = -32 + 3z$	$480 - 10 =$	470
$a = 193$	$y = 965 - 2z$	$x = -53 + 3z$	$482 - 17 =$	465
$a = 194$	$y = 970 - 2z$	$x = -74 + 3z$	$485 - 24 =$	461
$a = 195$	$y = 975 - 2z$	$x = -95 + 3z$	$487 - 31 =$	456
&c.	&c.	&c.	&c.	
$a = 295$	$y = 1475 - 2z$	$x = -2195 + 3z$	$737 - 731 =$	6
$a = 296$	$y = 1480 - 2z$	$x = -2216 + 3z$	$740 - 738 =$	2.

Ad terminum 190 *um* usque liquet quod inter valores z , censeretur zero, salvis valoribus possibilibus y et x , postea vero non item, ex eo quod valores x , ob terminum absolutum jam negativum, emergent negativi seu impossibiles. Porro, ex valoribus subsequenter z ope progressionis y elicitis tot auferri debent quot pariunt negativos valores x . Sic in termino 191 *mo*, tres valores z , scilicet 1, 2, 3 qui negativum exhibent $-11 + 3z = x$ demendi sunt a 477 valoribus ope $955 - 2z = y$ comparatis, et inde restant 474 tantum valores.

Denique, notandum est quod termini 190 valorum z , ex binis progressionibus arithmetice conflantur, scilicet 3, 8,

13, &c. et 6, 11, 16, &c. Ex binis etiam termini reliqui
 $296 - 190 = 106$, scilicet 474, 465, 456, &c. et 470,
 461, 452, &c. Quatuor autem progressionum summa
 dabit omnes valores z et idcirco problematis solutiones,

$$3, 8, 13, - 473 = \frac{3 + 473 \times 95}{2} = 22610$$

$$6, 11, 16, - 476 = \frac{6 + 476 \times 95}{2} = 22895$$

$$474, 465, - 6 = \frac{474 + 6 \times 53}{2} = 12720$$

$$470, 461, - 2 = \frac{470 + 2 \times 53}{2} = 12508$$

70733

115. Huic quæstioni 70734 solutiones tribuit *Simpson*
Algeb. p. 200, edit. 2dæ. Virum acutissimum sane et cui
 multum debet Mathesis, præ festinatione effugit, zero mi-
 norem limitem q (seu a) designare non posse. Hoc enim
 posito, valor generalis y , scilicet $5q - 2z$ evaderet negati-
 vus seu impossibilis. Pariter lapsus est statuendo solutiones
 60 problematis penultimi, 59 tantum admittentis; nam
 ubi $z = 14$, unicum sortietur valorem y , scilicet 5, et x ,
 scilicet 7. Sed

Opere in longo fas est obrepere somnum.

116. Si quærantur valores integri et affirmativi, x , y et z ,
 quæstio 70395 solutiones sortietur, nam quatuor progressi-
 ons arithmeticæ evadent

$$\begin{array}{rcl}
 2, 7, 12 & - & - & - & 472 = 22515 \\
 4, 9, 14 & - & - & - & 474 = 22705 \\
 474, 465, 456 & - & & & 6 = 12720 \\
 469, 460, 451 & - & & & 1 = 12455 \\
 & & & & \hline
 & & & & 70395.
 \end{array}$$

117. Notandum est quod in quæstionibus trium quantitatum incognitarum solvendis a methodo *Moirvæana* defleximus, utpote quæ solutiones justo pauciores elicitura sit, nisi quantitas x in generalibus valoribus y et z , prodeat iisdem affecta signis; aut substituendo valorem binomium ad idem in utrisque revocetur signum: cæterum haud raro prodibit z diversis affecta signis, ut in exemplis allatis; et aliquando nullo artificio, notante *Dodson*, p. 22, ad eadem signa in utrisque revocari potest.

His vestigiis insistendo eruere possimus solutiones æquationum quatuor quantitates incognitas involventium, cæterum quum parum utiles sint, adjungam potius problema cujus usus in Chronologia egregius.

P R O B. VIII.

118. *Invenire numerum quendam qui per divisores duos pluresve datos successive divisus, residua sortiatur numeris quoque datis respective æqualia.*

Ex. gr. Quotus annus *Periodi Juliani* erit simul tertius *Cycli Solis*, septendecimus *Cycli Lunæ*, et undecimus *Cycli Indictionis*; designantibus nimirum *Cyclis* hisce annorum 28, 19, et 15 respective, divisores datos, et numeris 3, 17, et 11, residua data.

Sit n numerus qui per 28 et 19 divisus fortietur residua 3 et 17 respective, eruntque $\frac{n-3}{28}$ et $\frac{n-17}{19}$ integri. Finge $x = \frac{n-3}{28}$ et $y = \frac{n-17}{19}$. Unde prodibit $n = 19y + 17 = 28x + 3$, et $y = \frac{28x-14}{19}$ integer, dempto autem integro $\frac{19x-19}{19}$ erit residuum $\frac{9x+5}{19} = a$ integer, adeoque $x = \frac{19a-5}{9}$ integer, et residuum $\frac{a+4}{9} = b$ integer, et $a = 9b - 4$. Unde substituendo, erit $x = 19b - 9$, $y = 28b - 14$, et $n = 532b - 249$. Hinc erit b affirmativus, & substituto minimo valore ejus, scilicet 1, evadet $n = 532 - 249 = 283$, qui utique condiciones divisorum 28 et 19 implebit.

Porro, si huic numero 283 addatur aut divisor primus 28, aut multiplus ejus quivis, adhuc explebit summa conditionem divisoris primi. Similiter, si eidem 283 addatur aut divisor secundus 19, aut multiplus secundi quilibet, explebit summa conditionem divisoris secundi; et proinde si eidem addatur 532 factum ex utrisque divisoribus in se ductis, aut quivis multiplus ejus, puta $532z$, designante nimirum z integrum quemcunque affirmativum, perinde explebit summa divisoris utriusque condiciones.

Finge nunc $532z + 283$ conditionibus divisoris primi et secundi satisficientem, esse numerum quæsitum, atque idcirco conditioni tertii quoque divisoris 15 respondere; eritque $\frac{532z + 283 - 11}{15}$ integer, adeoque dempto integro

$\frac{525z + 270}{15}$ erit $\frac{7z + 2}{15}$ integer = c , et $z = \frac{15c - 2}{7}$; at-

que iterum $\frac{c - 2}{7} = d$ integer, et $c = 7d + 2$: unde sub-

stituendo erit $z = 15d + 4$. Hinc erit d vel zero, vel affirmativus; et minimus valor z , evanescente d , = 4. Evadet igitur numerus quæsitus $532z + 283 = 2128 + 283 = 2411$, qui nimirum annum periodi Juliani quæsitum indicabit.

Similiter, Datis divisore quarto residuoque sibi proprio, invenire licet numerum qui conditionibus quatuor divisorum satisfaciet, si numero jam invento 2411 addatur multiplex quidam 7980 ex tribus divisoribus datis conflati; atque ita deinceps.

Sin numerus hoc pacto inventus minimum multiplex communem omnium divisorum datorum transcendat, non erit minimus qui cunctas explebit conditiones; dividendo autem hunc numerum per minimum multiplex communem, residuum peracta divisione dabit minimum. Et si huic residuo addatur deinceps divisor communis, inveniri possunt ad libitum numeri qui problematis conditiones exsolvent.

119. Traditis jam solutionibus problematum indeterminatorum quæ ad æquationes simplices deducunt, nonnulla ex *Diophantæis*, quæ circa numeros quadratos versantur, et ex quadraticarum reductione pendent, adjungere libet.

De numeris rationalibus tantum agit *Diophantus* ablegatis furdis.

P R O B. I.

120. *Numerum quadratum datum in duos quadratos dividere.*

Sit quadratus dividendus 25, et q. quæsit x^2 et y^2 , adeoque $x^2 + y^2 = 25$. Finge jam latus alterutrius quadrati quæsit esse æquale summæ vel differentiæ lateris quadrati dati et lateris alterius quæsit quolibet numero præter unitatem affecti, puta $y = 5 \pm 2x$ vel $2x \pm 5$. Quadrando igitur hunc valorem y , et substituendo pro y^2 , evadet

$$5x^2 \pm 20x + 25 = 25.$$

Et transponendo $5x^2 = \mp 20x$

Et dividendo $x = \mp 4$, adeoque $y (= 5 \pm 2x) = \mp 3$.

Et horum quadrata 16 et 9 conficiunt 25.

Similiter, sit $y = 5 - \frac{1}{2}x$, per reductionem evadet $x = 4$

et $5 - \frac{1}{2}x = 3$. Sit $y = 5 - 3x$, erit $x = 3$ et $5 - 3x$

$= -4$. Sit $y = 4x - 5$, eritque $x = \frac{40}{17}$ et $4x - 5 = \frac{75}{17}$

quorum quadrata $\frac{1600}{289}$ et $\frac{5625}{289}$ absolunt 25. Atque ita de-

inceps. Sed quo magis ab unitate recedunt coefficientes x , in valores fractos eo profusiores excurrent latera quæsit.

121. Quo percipiatur singulare *Diophanti* artificium in hac solutione, observandum est, 1^{mo}. Latus quadrati dati in membrum unum lateris ficti adsumi, ad tollendum ex æquatione resultante quadratum datum, quo pacto æquatio

quadratica, sublato termino absoluto deprimetur ad simplicem, et inde eruetur valor x per divisionem solam, qui idcirco semper erit rationalis.

2. Debere coefficientem x membri alterius lateris ficti esse majorem minoremve unitate; nam si ponatur unitas, orietur valor x in æquatione resultante æqualis lateri ipsius quadrati dividendi, et proinde ipsum latus fictum reperiatur nihil. Sic posito $y = 5 - x$, per reductionem prodibit $x = 5$, et $5 - x = 0$.

3. Posse latus fictum esse binomium vel residuum, ex priore enim emergent latera negativa, ex posteriore eadem positiva, quorum utraque æquo jure quæstionem solvent; ut plurimum vero ponitur residuum, quam formam ipse adhibet *Diophantus*.

P R O B. II.

122. Numerum datum ex duobus quadratis conflatum in alios duos quadratos dividere.

Sit numerus dividendus $13 = 4 + 9$. Sumptis lateribus quadratorum datorum 2 et 3, ponantur latera quæstitorum quadratorum $x - 2$ et $2x - 3$. Horum quadrata simul $5x^2 - 16x + 13 = 13$, et per reductionem prodibit $x = \frac{16}{5}$; adeoq. $x - 2 = \frac{6}{5}$ et $2x - 3 = \frac{17}{5}$, quorum quadrata $\frac{36}{25}$ et $\frac{289}{25}$ simul $= \frac{325}{25} = 13$. At si ponantur latera $x + 2$ et $2x - 3$, erit $5x^2 - 8x + 13 = 13$, et per reductionem $x = \frac{8}{5}$ adeoque $x + 2 = \frac{18}{5}$ et $2x - 3 = \frac{1}{5}$.

at horum quadrata quoque $\frac{324}{25}$ et $\frac{1}{25}$ conficiunt 13. Atque ita semper prodibunt bina quadratorum paria, quorum alterutrum quæstioni satisfaciet, prout latera ficta ponantur vel utraque residua, vel alterum binomium existente altero residuo.

123. Cæterum cavendum est 1^{mo}. Ne idem statuatur coefficientis x in utroque latere ficto; alioquin latera quadratorum quæditorum non prodibunt diversa a datis. Sic positus $x + 2$ et $x - 3$, evadent latera quæsitæ 3 et ± 2 quæ jam data sunt.

2. Ne coefficientes x in utroque latere, ubi hæc latera sunt residua, sint inter se in ratione laterum datorum, aut altero existente binomio, in ratione summæ datorum laterum ad eorundem differentiam; alioquin idem sequetur absurdum, quod scilicet latera quæsitæ emergent eadem ac data.

P R O B. III.

124. *Invenire numerum quadratum qui adjecto quolibet numero conficiat quadratum.*

Sit quadratus quæsitus x^2 , conficiatque quadratum $x^2 + 3$. Finge latus posterioris, $x - n$ (designante n numerum quemcunque) et quadrando, erit

$$x^2 - 2nx + n^2 = x^2 + 3,$$

Et transponendo $\therefore 2nx = n^2 - 3$

Adeoque $x = \frac{n^2 - 3}{2n}$

Posito igitur $n = 6$, erit $x = \frac{11}{4}$, adeoq. $x^2 = \frac{121}{16}$, et
 $x^2 + 3 = \frac{169}{16}$ quadratus nimirum cuius latus est $\frac{13}{4}$. Va-
 riantem autem utcumque n , variari quæstionis solutiones ma-
 nifestum est. Similiter, *invenire licet quadratum a quo dempto*
numero dato residuum erit quadratus.

125. In quæstionibus prioribus negotium erat æquati-
 onem quadraticam ad simplicem deprimere, tollendo qua-
 dratum datum, in novissimâ vero, quadratum quæsitum.
 Æquationum quadraticarum reductionem nusquam in sex
 libris *Aritbmeticorum* jam extantibus ex professo tradit
Diophantus, harum tamen regulam tali latuisse viro mi-
 nime credendum est; & ipse quidem pollicetur, Def. 11.
 se quadraticarum solutiones postea demonstraturum.
 Satis profectò evincunt problematis insequentis limitatio-
 nes, cujus solutionem mira subtilitate expedit *Diophantus*,
 Lib. 5, Quæst. 33, illum probe quadraticarum reductio-
 nem cognovisse.

Οκλαδράχμης καὶ πενταδράχμης χοέας τὶς ἔμιξε

Τοῖς προπολοῖσι πλεῖν χρῆς' ἀποταξάμενος.

Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετραγώνων,

Τὰς ἐπιταχθεῖσας δεξάμενον μονάδας,

Καὶ ποιῆντα πάλιν ἕτερον σε φέρειν τετράγωνον,

Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα των χοέων.

Ωσε διασειλον τῆς ὀκλαδράχμης πόσοι ἦσαν

Καὶ πάλι τῆς ἑτέρας παῖ λέγε πενταδράχμης.

Epigrammatis propositum tale est. Emit quidam duos cados vini, unius quidem choam drachmis 8, alterius vero choam drachmis 5, in usum famulorum miscendos; et pro omnibus chois persolvit numerum quadratum, cui addendo numerum datum 60, fit alter quadratus, latus habens summam choarum. Quæritur numerus choarum utriusque pretii.

Sit x summa choarum, et cum pretium summæ + 60 adæquat x^2 , erit pretium summæ $x^2 - 60$. Finge hoc erogari pro chois 5 drachmarum folis, et prodibit numerus choarum quinque drachmis $\frac{x^2 - 60}{5}$ major quam x , (cum x contineat choas aliquot 8 drachmis) erit igitur $x^2 - 60$ major quam $5x$, five x^2 major quam $5x + 60$, et per reductionem, x major quam $\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + 60}$, id est, major quam 10,7. Similiter, erit numerus choarum folis 8 drachmis $\frac{x^2 - 60}{8}$ minor quam x , adeoque x^2 minor quam $8x + 60$, et per reductionem, x minor quam 12,7. Oportet igitur valorem x inter limites 10,7, et 12,7 inveniri, et proinde *a fortiori*, inter limites integros arctiores 11 et 12, quos ponit *Diophantus*.

Sed altera quoque datur restrictio valoris x , scilicet, quod $x^2 - 60$ debet esse numerus quadratus. Finge igitur latus hujus $x - y$, et quadrando, erit $x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - 60$, adeoque per prob. *præced.* $x = \frac{y^2 + 60}{2y}$. At necesse est $\frac{y^2 + 60}{2y}$ ($= x$) esse majorem quam 11, five y^2 majorem quam $22y - 60$, adeoque per reductionem, y majorem

rem quam $11 + \sqrt{61}$ five 18,7. et pari ratione, $\frac{y^2 + 60}{2y}$ esse minorem quam 12, five y^2 minorem quam $2y - 60$, adeoque per reductionem, y minorem quam 21,2. Oportet igitur numerum assumptum y inter limites 18,7 et 21,2. consistere, adeoque inter limites integros *Diophantos* 19 et 21.

Putamus jam y medium obtinere locum inter 19 et 21, scilicet 20, et substituto hoc valore y in æquationem $x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - 60$, prodibit $x^2 - 40x + 400 = x^2 - 60$, adeoque $x = 11\frac{1}{2}$, et proinde $x^2 - 60 = 132\frac{1}{4} - 60 = 72\frac{1}{4}$. Ergo summa choarum fit $11\frac{1}{2}$, intra limites nempe præscriptos, et totum pretium $72\frac{1}{4}$ drachmarum, scilicet numerus quadratus (utpote latus habens $8\frac{1}{2}$).

Denique, quo inveniatur numerus choarum utriusque pretii, fit z numerus choarum 5 drachmis, et erit $11\frac{1}{2} - z$ numerus choarum 8 drachmis, pretium priorum erit $5z$ drachm. posteriorum autem $92 - 8z$ drachm. adeoque pretium summæ $5z + 92 - 8z$ five $92 - 3z = 72\frac{1}{4}$, et proinde $3z = 19\frac{3}{4}$, et $z = 6\frac{3}{4}$, et inde $11\frac{1}{2} - z = 4\frac{1}{4}$. Numerus igitur choarum 5 drachmis evadit $7\frac{1}{4}$, choarum autem 8 drachmis $4\frac{1}{4}$.

Alii quoque dantur limites valoris y . Nam $11 \pm \sqrt{61}$ evadit 18,7 vel 3,3. et $12 \pm \sqrt{84}$ evadit 21,2 vel 2,8. Consistere igitur potest y inter 3,3 et 2,8. Putamus $y = 3$, et substituendo $x - 3$ ut antea, exurget $x = 11\frac{1}{2}$. Sin limites alterutros transgrediatur y , exulabit x a limitibus præscriptis, et numerus choarum vel 8 drachmis vel 5 drachmis emerget negativus, quod impossibile est.

126. Pauca. hæc exempla in specimen sagacissimi *Diophanti* ingenii ad quæstiones vel spinosissimas expediendas sufficiant. Haud parum quidem intentionis animi lectoribus etiam mathematice doctis requiritur ad solutiones complures *Diophantæas* capiendas, præter materiæ subtilitatem, ex eo quod perpaucas notas algebraicas adhibet, adeo ut plures sæpe quantitates incognitæ eadem designantur specie. Sic in propositione novissima, quantitates quas notis x , y , et z , distinximus, omnes una specie s designat *Diophantus*.

127. Quo tempore inventa fuit Arithmetica speciosa seu Algebra, in incerto est. Hoc saltem præsumendum est, inventorem non fuisse *Diophantum*, quippe qui medias in res, haud secus ac notas lectorem rapit, et nullis fere præmissis principiis, quæstionibus solvendis statim se accingit. Innuvit tantum, idque obiter, quasi demonstratione non egens, "quod minus in minus dat plus, in plus autem, minus." Et præterea monet, Def. 10, "Expediit eum qui hoc negotii sit aggressurus, in additione subductione et multiplicatione specierum jamdudum exercitatum esse." Nisi forsitan instituebantur elementa artis necessaria in alio quodam opere *Diophanti* jam deperdito, de *Arithmeticæ praxi*; de quo meminit *Theon*.

128. Priscis Mathematicis *Platoni*, *Euclidi*, *Archimedi*, &c. hanc Artem innotuisse, recentiorum contenderunt multi. *Schootenius*, *Nonius* aliique, ad quorum sententiam accedit quoque *Wallis*, cum certo scirent ex demonstrationum et constructionum subtilitate et elegantia, analysin quendam Veteribus probe cognitam esse, neque aliam nossent præter eam quæ Algebrae speciosæ ope instituitur, nullumque hujus vestigium ante *Diophantum* invenissent; Veteres admirationis aucupandæ temere insimularunt, utpote qui inventa sua vulgari tantum syntheseos forma tradebant,

hoc consilio, ut artem suam analyticam a Posteris celarent. Luculenter autem constat ex *Pappi Alexandrini* præfatione ad Lib. 7, *Collectionum Mathematicarum*, veteres Geometras in solutionibus Theorematum & Problematum propositorum investigandis analysin geometricam usurpasse; eamque plenius exposuisse *Euclidem*, nempe Elementorum scriptorem, *Apollonium Pergæum*, *Aristæum* seniore, et *Eratosthenem*; quorum opera analytica 33 libris contenta recenset *Pappus*, qui & ipse naturam analyseos & syntheseos Veterum optime explicat.

Analysin Veterum ita collaudat *Halley* Geometer simul et Algebraïsta summus, in Præfatione ad editionem suam *Apollonii Pergæi, De Sectione Rationis*.

“ Methodus hæc cum *Algebra Speciosa* facilitate contentit, evidentiâ vero & demonstrationum elegantia eam longe superare videtur: ut abunde constabit, si quis conferat hanc *Apollonii* doctrinam *De Sectione Rationis* cum ejusdem Problematis analysi Algebraicâ, quam exhibuit *Cl. Wallisus, Tom 2, Operum Mathematicarum, cap. 54, pag. 220.* ”
 Consulat quoque lector Appendicem ad *Simpsoni Conica, edit. 2da.* ubi trium propositionum solutiones Algebraicas cum iis quæ per analysin geometricam fiunt conficere licet. Miro certe veteris analyseos flagrabat amore *Halley*, qui immane quoddam, imo vix credibile est ausus, nempe opus interpretandi Versionem Arabicam *Apollonii de Sectione Rationis* (*Apollonii* opere περί λόγων ἀποτομῆς deperdito) linguæ Arabicæ ipse prorsus ignarus! & quod vel Arabice doctissimum absterruerit, codex ille pessimâ manu exaratus, punctisque diacriticis destitutus, & diagrammatum lineas literis male signatas & distinctas habens, mendis lacunisque scatebat. Verum beneficio schedarum aliquot, quas, paucis ante annis, latine verterat *D. Bernardus, Astronomiæ Professor Savilianus*, quæ, clavis ad instar, aditum illi aperuerunt ad *Apollonii* mentem investigandam; excerptis vocibus illis de

quibus ex versione *Bernardi* liquido constabat, dein ad argumentum respiciendo, & notas obscuriores iterum iterumque secum evolvendo, quid voluerunt paulatim deprehendit, & hac quasi *decipbrandi* methodo totum librum perlegit, eundemque denuo pedetentim percurrando, opus integrum absque alterius cujuscumque auxilio ad finem perduxit.

129. Observandum restat, quod resolutio æquationum indeterminatarum in applicatione Algebrae ad Geometriam apprimè utilis est, cum præcipuarum curvarum æquationes sunt indeterminatæ. Methodus tamen generalis tales solvendi hæcenus desideratur ultra problemata primi gradus. Licet enim occurrunt solutiones problematum secundi, tertii et etiam quarti gradus apud *Diophantum* ejusque Commentatores, sunt tantum particulares. Qui plura autem de hisce desiderat, consulat dissertationes *Euleri*, *Acad. Petrop.* Tom 6, *veter.* et Tom 9, *nov.* Et *La Grange Acad. Berlin.* Tom 23.

ANALYSIS ÆQUATIONUM.

PARS TERTIA.

130. Hactenus exposuimus modos ordinandi & concinnandi æquationes, easdemque reducendi si modo secundum non transcendat gradum. Antequam vero resolutionem æquationum dimensionum superiorum aggrediamur, necesse erit *præparationem æquationum* instituere, præmittendo aliqua de naturâ radicum & præcipuis transmutationibus æquationum.

DE NATURA RADICUM ÆQUATIONIS.

131. *Radix est numerus vel species qui si in æquatione pro specie radicem significantem substituatur, efficiet omnes terminos evanescere.*

Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, unitas est radix, quoniam scripta pro x producit $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc est nihil. Sed

132. *Æquationis ejusdem plures esse possunt radices.*

Nam si in hac eadem æquatione $x^4 - x^3$, &c. $= 0$, pro x scribas numerum 2, & pro potestatibus x similes potestates numeri 2, producet $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc est nihil. Atque ita si pro x scribas numerum 3 vel numerum negativum -5 , utroque casu producet nihil, terminis affirmativis & negativis in his quoque casibus se mutuo destruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3

vel — 5, quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x , efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquantur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Atque ita æquationis $x^3 = 1$, seu $x^3 - 1 = 0$, tres radices erunt 1, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, vel $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, nam si scribas 1 pro x , producet 1 — 1, hoc est nihil; si scribas $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ pro x , producet $\frac{8}{8} - 1$, hoc est nihil; et similiter, si scribatur $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ pro x . In speciebus quoque idem fiet; sic æquationis $x^4 - px^3 (-p^2 + q)x^2 + p^3x - p^2q = 0$, sunt p , $-p$, $\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, vel $\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ radices; nam scribendo p pro x producet $p^4 - p^4 - p^4 + p^2q + p^4 - p^2q$, hoc est nihil; & sic deinceps.

Hinc liquet quantitates reales & impossibiles æque fungi posse munere radicum, efficiendo omnes æquationis terminos evanescere.

133/ *Eandem vero æquationem plures habere posse radices æquum est, cum plures esse possunt ejusdem problematis solutiones.*
§ 34.

134. Raro tamen omnes æquationis radices, etiam si reales & affirmativæ sint, problema a quo deducta est ista æquatio solvent. § 35 & 44. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in problemate quod ad æquationem nil spectat. Nam si æquatio non complectitur omnes conditiones problematis,

non necesse est ut omnium conditionum teneatur limitibus, quicquid amplius est in problemate quam in æquatione potest illud limitibus arcere, hanc non item. § 32. Veruntamen necesse est æquationem qua respondetur tot habere radices quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendent, & eadem argumentandi ratione determinandi. Nam quisque casus diversus solutionem diversam postulat. Et quidem casus problematum indigitare a datis diversos, est proprium munus radicum *negativarum*. § 43 & 93. Hinc in quæstionibus geometricis et physicis radices affirmativæ & negativæ ad plagas oppositas tendere solent. § 40, & 42.

135. Hæc æquationum copia simul quæsitæ & non quæsitæ complectentium inveniendis diversis casibus ejusdem problematis generalis inservire potest. Nihilominus fatendum est, incommodo sæpe laborare hanc copiam, ubi solutionem quæsitam aliis nexam atque implicitam non sine calculo valde operoso secernere atque evolvere licet; ut bene quidem monet *D'Alembert* *. “ Les quantités négatives — montrent tout à la fois & la richesse de cette science, qui fait trouver dans la solution du problème, jusqu’aux choses qu’on ne demandoit pas, & en même tems, si on ose le dire, l’imperfection du calcul, qui en donnant ce qu’on ne cherche pas, & qu’on ne lui demande point, ne donne pas toujours ce qu’on lui demande avec toute la perfection qu’on pourroit exiger. C’est qui n’arrive que trop dans les questions algébriques; la solution d’un problème, qui n’en a quelquefois réellement qu’une seule possible (dans le sens où il a été proposé) est souvent incorporée & comme amalgamée

* *Mélanges de Littérature*, vol. 5, p. 230.

“ avec plusieurs autres solutions de problèmes analogues,
 “ mais différens ; solutions qui enveloppent & masquant,
 “ pour ainsi dire, la première, la rendent plus difficile à
 “ découvrir. Ceux qui ont quelque connoissance de ce
 “ qu'on appelle en Algebre la théorie des équations, savent
 “ par expérience la vérité de ce que nous venons de dire.”

136. *Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est, ne casus problematum qui sæpe impossibiles sunt exhibeant possibiles,* § 34 & 46.

Et hic quidem observandum est, quod in *Algebrâ* radix impossibilis est tantum nota seu symbolum operationis quæ in certo quodam casu fieri nequit, ejusque idcirco munus est *genesin* quantitatis quæsitæ, & *limites* intra quos consistere potest, indicare: *Geometria* vero radices impossibiles proprie non agnoscit, ex eo quod solutio quæstionis geometricæ tantum exponi potest ubi sit realis. Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, designantibus p perpendiculum a centro in rectam demissum, r radium ductum ad intersectionem, & x distantiam intersectionis a p , habetur æquatio intersectionem definiens $x^2 = r^2 - p^2$, per *Eucl. Lib. 1, Prop. 47*. Erit autem intersectio possibilis si p sit minus quam r , sin majus, fiet impossibilis ; & æquationis duæ radices quæ intersectiones duas determinant, nempe $x = \pm \sqrt{r^2 - p^2}$, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere experiment. Cæterum hæc radices geometricæ tantum exponere fas est ubi intersectio est possibilis.

137. Aliquando fieri potest, velut in cubicarum casu *irreducibili*, quod radices *reales* sub *specie impossibili* adumbrentur ; cæterum hoc fit ex eo quod conditiones in solutionem æquationis adscitæ, sibi in isto casu refragantur.

DE NUMERO RADICUM ÆQUATIONIS.

138. *Potest æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures; si modo termini ejus ex simplicibus potestatibus integris constanter.*

Æquationem simplicem unam sortiri radicem, quadraticam vero binas, ex Parte I. manifestum erat; unde in æquationibus dimensionum superiorum, similem esse rationem radicum, per analogiam conjicere liceret. Cæterum numerus et natura radicum ex *generatione æquationis* optime intelligetur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, vel — 5, observando retrogradam compositionis viam, supponamus x ambigue significare numeros illos, seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, vel $x = -5$, adeoque per transpositionem $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, vel $x + 5 = 0$. Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione $x - 1$ in $x - 2$ hæc æquatio $x^2 - 3x + 2 = 0$, quæ duarum est dimensionum ac duas habet radices 1 & 2; nam scriptâ 1 pro x evadit factor prior $1 - 1 = 0$, vel scripto 2 pro x evadit factor posterior $2 - 2 = 0$, unde in alterutro casu factum sub utrisque nihil erit, scil. $1 - 3 + 2 = 0$, vel $4 - 6 + 2 = 0$. Porro, ductis in se tribus factoribus $x - 1$, $x - 2$, & $x - 3$, generatur $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimensionum totidemque radicum 1, 2 vel 3; nam si x ambigue significat 1, 2 vel 3, evanescet primus, secundus aut tertius factor respective, at quolibet factore evanescente evanescet factum sub tribus. Denique ductis

in se quatuor factoribus $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$. & $x + 5$ fit $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, ut supra, æquatio quatuor dimensionum totidemque radicum 1, 2, 3, vel -5 . Nam si x ambigue, &c. Cum igitur hæc æquatio ex tot factoribus simplicibus generatur quot sunt dimensiones ejus, & factor quisque simplex unam suppeditat radicem, sequitur eam tot habere radices quot sunt dimensiones ejus. Non autem plures, cum præter hosce numeros nullus est cujus substitutione factor aliquis evadit nihil; ubi vero factorum nullus nihil est, quod sub omnibus continetur nihil esse non potest. Et simile est ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum sit quod æquationem resolvere & radices extrahere: habitis enim radicibus habentur factores.

Sed revocare gradus —

Hic labor, hoc opus.

139. Possunt quoque æquationes plurium dimensionum, ex aliis inferiorum dimensionum, illarum dimensiones simul æquiparantium generari. Nam æquationem cubicam ex quadraticâ & simplici in se ductis; biquadraticam ex cubica & simplici vel ex duabus quadraticis in se ductis generari concipiamus; atque ita deinceps. Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19x^2$ &c. factores sunt $x^3 - 6x^2$ &c. et $x + 5 = 0$, vel $x^2 - 3x + 2 = 0$, & $x^2 + 2x - 15 = 0$. Itemque æquationis $x^3 - 1 = 0$, factores sunt $x^2 + x + 1 = 0$, & $x - 1 = 0$. Factorum vero quadraticorum, &c. radices erunt radices æquationum.

140. Hanc generationem æquationum, in quadraticis saltem, ex principiis Geometricis insuper confirmare & illustrare jam aggrediemur.

Nam ad quadraticas puras quod attinet, si habentur duæ quantitates x & q , quarum major sit x , erit $x^2 - q^2 = (x + q)(x - q)$, per *Eucl. Lib. 2. Prop. 5*. At si x fiat æqualis q , evanescet tum $x^2 - q^2$ tum $x - q$. Unde legitime concludamus æquationem algebraicam $x^2 - q^2 = 0$, generari posse ex multiplicatione factorum simplicium $x + q$ & $x - q$, quorum alter potest esse nihil. Contra, $x^2 + q^2 = \frac{(x + q)^2 + (x - q)^2}{2}$, per *Eucl. Lib. 2. Prop. 9*.

Minus recte igitur concludamus constitui posse æquationem algebraicam $x^2 + q^2 = 0$, neutiquam evanescente $\frac{(x + q)^2 + (x - q)^2}{2}$; aut generari posse multiplicatione duorum factorum simplicium, cum ex semisumma quadratorum summæ & differentiæ x & q revera conflatur. Ergo prodeunt hujus factores $x \pm q\sqrt{-1}$ impossibiles, ut æquum est.

Eadem quoque obtinent in quadraticis affectis. Nam si data quædam quantitas p dividatur duas in partes inæquales quarum una sit x , alteram designabit $p - x$, et designante q rectangulum partium, erit $q = px - x^2$, per *Eucl. Lib. 2. Prop. 3*, et horum differentia nempe $x^2 - px + q$ æquatur nihilo. Unde legitime concludamus æquationem algebraicam $x^2 - px + q = 0$, generari posse multiplicatione factorum $x - \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ & $x - \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, quorum alteruter erit nihil, ob $x - \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$; & quorum uterque erit possibilis, cum q in hoc casu est necessario minus quam $\frac{1}{4}p^2$, per *Eucl. Lib. 2. Prop. 5*. Contra, designantibus x & q latera trianguli angulum acutum comprehendentia, p segmentum majoris lateris x interceptum inter perpendicularum ab angulo opposito & angulum acutum, exponet $x^2 - 2px + q^2$ quadratum lateris reliqui angulo acuto oppositi, per *Eucl. Lib. 2. Prop. 13*.

At hoc latus, salvo triangulo nunquam evanescere potest. Ergo æquationis $x^2 - 2px + q^2 = 0$, factores $x - p \pm \sqrt{p^2 - q^2}$ prodeunt impossibiles, cum q^2 in hoc casu, est necessario majus quam p^2 , per *Eucl. Lib. 1. Prop. 47*. Et ex hypothese impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

141. Usus æquationum originalium $x - a = 0$, $x^2 - 20x - 9 = 0$, in compositionem æquationum superiorum dimensionum, qualem explicuimus, primus patefecit ingens ille algebrae hodiernæ repertor ac instaurator *Vieta* *; qui methodum generalem invenit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet, ubique, ut ait, *observando retrogradam compositionis viam*. Hujusque vestigiis insistentes *Harriott*, *Oughtred*, alique tam nostrates quam extranei quæcunque de hac re scriptis mandarunt, a *Vieta* desumpta debent agnoscere; judice *Halley*, *Phil. Trans. An. 1687. N° 190. Art. 2. Montucla*, &c.

Ex generatione æquationum, regulam insequentem in analysi multis nominibus perutilem, atque uberrimam elicit *Harriott*.

* *Vieta* vir fuit ingeniosa & profunda meditatione, cujus vi nihil illi inaccessum in abstrusioribus scientiis, nihil quod acumine mentis posset confici, difficile confectu fuit. Hujus tale dedit indicium. Bello inter Gallos Hispanosque ingruente, literæ pleræque Hispanorum quibus præfectos ad Belgium de consiliorum suorum rationibus monebant, interceptæ, ob ingentem notarum multitudinem, (utebantur enim amplius 500, exoleto & incognito charactere exaratis) eos qui vulgo in his rebus industriam suam exercent prorsus eluserunt. Itaque ad Vietnam regis jussu missæ sunt, qui familiari sibi in studiis gravioribus meditatione illud totum expiscatus est, & pleræque deinceps alias maximi momenti, reperto semel arcano, nullo negotio interpretatus est. Quod res Hispanas totum biennium valde conturbavit. Qui, re tandem per literas vicissim interceptas detestâ, *Magis Artibus*, nam aliter fieri non potuisse, a Rege id factum, passim publicabant.

DE COEFFICIENTIBUS & SIGNIS TERMINORUM
ÆQUATIONIS.

142. Ubi *coefficientis primi seu altissimi termini sit unitas, coefficientis secundi termini æquationis, si signum ejus mutetur æqualis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis; ea tertii, æqualis aggregato rectangulorum sub singulis binis radicibus; ea quarti si signum ejus mutetur, æquales aggregato contentorum sub singulis terni radicibus; ea quinti, æqualis aggregato contentorum sub singulis quaternis, &c. et denique ea ultimi æqualis contento unico sub omnibus radicibus.*

Assumamus $x = a$, $x = b$, $x = -c$, vel $x = d$, seu transponendo, $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, vel $x - d = 0$, et ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut supra.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{r}
 x - a \\
 \times x - b \\
 \hline
 \end{array} \\
 = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - a \\ -b \end{array} x + ab = 0. \text{ Æquatio quadrat.} \right. \\
 \begin{array}{r}
 \times x + c \\
 \hline
 \end{array} \\
 = \left\{ \begin{array}{l} -a \\ +c \end{array} x^3 - \begin{array}{l} a \\ -b \end{array} x^2 + \begin{array}{l} ab \\ -bc \end{array} x + abc = 0. \text{ Æquatio cubica.} \right. \\
 \begin{array}{r}
 \times x - d \\
 \hline
 \end{array} \\
 = \left\{ \begin{array}{l} -a \\ +c \\ -d \end{array} x^4 + \begin{array}{l} -ab \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{array} x^3 + \begin{array}{l} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +bd \end{array} x^2 - \begin{array}{l} +abc \\ -abd \\ +acd \\ +bcd \end{array} x - abcd = 0. \text{ Æq. biquadrat.} \right. \\
 \&c.
 \end{array}$$

143. Ex harum æquationum inspectione constat, quod coefficientis secundi termini sub signis mutatis, nimirum $+a + b$ in quadratica, $+a + b - c$ in cubica, $+a + b - c + d$ in biquadratica, est summa omnium radicum; coefficientis tertii $ab - ac + ad$, &c. summa rectangulorum sub singulis binis; ea quarti sub signis mutatis, $-abc + abd$, &c. summa contentorum sub singulis ternis; atque ea ultimi, nimirum $+ab$ in quadratica, $-abc$ in cubica, $-abcd$ in biquadratica, contentum unicum sub omnibus.

Et sic universaliter: æquationis cujuscunque $x^n \cdot Px^{n-1}$.

$Qx^{n-2} \cdot Rx^{n-3} \cdot Sx^{n-4}$ &c. = 0, coefficientis P, si signum ejus mutetur, æqualis sit summæ radicum a, b, c , &c. sub signis propriis; Q æqualis summæ rectangulorum sub singulis binis ab, ac , &c. bc, bd , &c. cd , &c. R, si signum ejus mutetur, æqualis summæ contentorum sub singulis ternis abc, abd , &c. bcd, bce , &c. cde , &c. S æqualis summæ contentorum sub singulis quaternis $abcd$, &c. $bcde$, &c. $cdef$, &c. Et sic in infinitum.

144. Hic observandum est, quod mutantur signa terminorum alternorum a secundo incipientium, quorum coefficientes sunt aggregata contentorum sub *impari* numero radicum signis mutatis; reliquorum vero terminorum non item. Nam in priore casu, mutatis signis radicum numero *imparium*, mutantur signa singulorum contentorum, adeoque et aggregati contentorum in unoquoque termino; at in posteriore casu, si servatis siue mutatis signis radicum numero *parium*, manent singulorum contentorum adeoque et aggregati signa. Sic $a \times b$ vel $-a \times -b = +ab$. At $a \times b \times -c = -abc$, & $-a \times -b \times c = +abc$. Et sic deinceps.

COR. I. Hinc cujusslibet termini æquationis, puta termini m^i , five inter terminos pares five impares inveniatur, coefficientis æqualis erit aggregato contentorum sub singulis $m-1$ radicibus, cum signis mutatis. Eritque numerus terminorum æquationis omnes suos terminos habentis, uno plus quam numerus radicum seu dimensionum.

COR. II. Si omnes radices æquationis sint affirmativæ, termini alterni a secundo incipientes erunt negativi, cæteri affirmativi; sin omnes radices sint negativæ, termini omnes erunt affirmativi.

COR. III. Si radices sint partim affirmativæ partim negativæ, præpollentibus affirmativis erit secundus terminus negativus, & vice versa; æquipollentibus vero affirmativis & negativis, evanescet. Itemque, præpollentibus rectangulis affirmativis &c. erit tertius terminus affirmativus, & vice versa; æquipollentibus vero evanescet. Et sic deinceps.

COR. IV. Si ultimus terminus æquationes defit, ex radicibus ejus una erit nihil, aliter enim non evanesceret contentum sub omnibus. Si penultimus quoque defit, ex radicibus duæ evanescunt, aliter enim non evanescerent singula contenta ex quibus simul sumptis conficitur penultimi coefficientis. Si tres postremi termini defint, tres ex radicibus evanescunt. Et sic deinceps.

COR. V. Æquationis cujuscunque terminos nec fractos nec surdos habentis nulla radix fracta esse potest. Nam æquationis $x^n - Px^{n-1} + Qx^{n-2} - \&c. + U = 0$, radix fit fractio $\frac{a}{b}$, ad minimos terminos ejus reducta; &

substituendo $\frac{a}{b}$ pro x , prodibit $\frac{a^n}{b^n} - \frac{Pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{Qa^{n-2}}{b^{n-2}}$
 — &c. + $U = 0$; deinde multiplicando omnes terminos
 per b^{n-1} & transponendo, erit $\frac{a^n}{b} = Pa^{n-1} - Qa^{n-2}b$
 + &c. — $Ub^{n-1} = 0$, cujus membrum posterius est
 integer, adeoque & prius $\frac{a^n}{b}$. Unde erit b aut unitas; aut
 ex divisoribus a^n . At in priore casu non foret $\frac{a}{b}$ frac-
 tio, nec ad minimos terminos reducta in posteriore casu;
 contra hypothesin. Possunt tamen radices esse furdæ. Sic
 æquationis $x^2 - x - 1 = 0$, radices sunt $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ &
 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

COR. VI. Æquationis cujuscunque terminos nec
 fractos nec furdos habentis omnes radices non furdæ & ra-
 dicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium
 contenta erunt aliqui ex divisoribus *integræ* ultimi termini;
 atque adeo ubi constiterit nullum ultimi termini divisorem
 esse aut radicem æquationis aut duarum radicum rectangu-
 lum pluriumve contentum, simul constabit nullam esse
 radicem radicumve rectangulum aut contentum nisi quod
 sit furdum.

COR. VII. Æquationis cujuscunque terminos nullos im-
 possibiles habentis radices impossibiles, siquæ sint, erunt 1.
 Numero pares. Nam ultimus terminus utpote contentum
 sub omnibus radicibus impossibilitate non vacaret, si com-
 positionem ejus ingrederetur numerus impar factorum im-

possibilium. 2. Paris cujusque partes impossibiles eadem erunt & contrariis signis affectæ. Aliter enim hæ partes per additionem non evanescerent ex termino secundo æquationis. 3. Paris cujusque partes reales, si quæ sint, erunt eadem & iisdem signis affectæ. Nam rectangula & contenta impossibilia sub singulis binis ternisve, &c. radicibus, ex reliquis terminis haud exularent nisi hæc contenta forent eadem & contrariis signis affecta; sed factores horum impossibiles per *part. noviss.* sunt iidem & contrariis signis affecti; ergo factores reales necessario erunt iidem & iisdem signis affecti.

Necesse est igitur ut hujusmodi æquationum radices impossibiles, si quæ sint, induant vel formam $\pm a + b\sqrt{-1}$ ubi ex parti reali & impossibili constantur, vel $\pm b\sqrt{-1}$ ubi nullam sortiuntur partem realem. Ex. gr.

Assumamus $x = a + b\sqrt{-1}$, $x = a - b\sqrt{-1}$, $x = +b\sqrt{-1}$, vel $x = -b\sqrt{-1}$. Et ex factorum $x - a + b\sqrt{-1}$ vel $x + b\sqrt{-1} = 0$, continua multiplicatione generemus æquationes; eritque

$$\begin{array}{r} x - a + b\sqrt{-1} \\ \times x - a + b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2ax + a^2 \\ \times x - b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} = 0. \text{ Æquatio quadratica.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2ax^2 + a^2x \\ \times x - b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + b^2 \\ \times x - b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x - a^2b\sqrt{-1} \\ \times x - b^3\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} = 0. \text{ Æq. cub.}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 \\ \times x + b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + a^2x \\ \times x + b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 2ab^2x + b^4 \\ \times x + b\sqrt{-1} \\ \hline \end{array} = 0. \text{ Æq. biquadratica.}$$

Ubi observandum, quod in æquationibus parium dimensionum pelluntur quantitates impossibiles ex secundo termino per additionem solam, ex ultimo termino per multiplicationem solam, & ex terminis intermediis per additionem & multiplicationem conjunctim; contra, in terminis æquationum imparium dimensionum semper hærent quantitates impossibiles.

COR. VIII. Æquationis cujuscunque dimensionis imparis omnes suos terminos reales habentis erit una saltem radix realis, cum numerus radicum impossibilium semper fit par, *per cor. præced.*

COR. IX. Designante P, si signum ejus mutetur, summam radicum a, b, c , &c. sub signis propriis, mutando insuper signa alternorum coefficientium a secundo incipientium R, T, &c. facile invenire possumus summam quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. ex singulis radicibus, ope formularum § 79. Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, ubi coefficientis secundi termini est -1 , tertii -19 , quarti $+49$, quinti -30 ; ponendum erit $+1 = P$, $-19 = Q$, $+49 = R$, $-30 = S$. Et inde orientur

$A = P = 1$, *summa radicum.*

$B = PA - 2Q = 1 + 38 = 39$, *summa quadratorum.*

$C = PB - QA + 3R = 39 + 19 - 147 = -89$, *summa cuborum.*

$D = PC - QB + RA - 4S = -89 + 741 - 49 + 120 = 723$, *sum. biq.*

Nimirum æquationis illius radices sunt 1, 2, 3 & -5 , et harum summa $1 + 2 + 3 - 5 = 1$, summa quadratorum $1 + 4 + 9 + 25$ est 39, summa cuborum $1 + 8 + 27 - 125$ est -89 , & summa biquadratorum $1 + 16 + 81 + 625$ est 723.

Paulo aliter, et commodius quidem, calculum instituit *Newtonus*; mutat enim signa *omnium* coefficientium, quo evitetur confusio (ut videtur) si qua forte inter operandum suboriatur, mutandis tantum signis coefficientium alternarum P, R, T, &c. Dein, quo compensetur mutatio signorum reliquarum Q, S, V, &c. mutat quoque signa terminorum formulis in singulis negativorum quos nempe subeunt hæ coefficientes Q, S, V, &c. quo pacto *omnes* formularum termini prodeunt affirmativi; scilicet, $B = PA + 2Q$, $C = PB + QA + 3R$, &c.

COR. X. Facile determinari potest numerus contentorum sub singulis binis, ternis, pluribusve radicibus, in unoquoque coefficiente P, Q, R, &c. ope Theorematis Binomii. Nam si omnes radices *a, b, c, &c.* sint inter se

$$\text{æquales, singulas designabit } a, \text{ eritque } (x - a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^2 x^{n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$$

$$a^3 x^{n-3} + \text{&c.} = 0, \text{ adeoque P coefficientis secundi termini} \\ = na, Q = n \cdot \frac{n-1}{2} a^2, R = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^3 \text{ &c.}$$

$$\text{Exponet igitur } n \text{ summam radicum } a; n \cdot \frac{n-1}{2} \text{ summam} \\ \text{rectangulorum sub singulis binis } aa; \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$$

summam contentorum sub singulis ternis *aaa*, &c. Verum hoc quoque ita se habebit, si radices *a, b, c, &c.* sint *inæquales*; cum hæc conditio nec mutabit numerum radicum singula contenta componentium, nec ipsorum contentorum numerum in unoquoque termino æquationis.

Ex. gr. Sit numerus radicum $n = 4$; erit numerus con-

tentorum sub singulis binis $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$; numerus contentorum sub singulis ternis $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$; sub singulis quaternis $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$; ut in æquatione biquadratica supra allatâ. Estque hæc regula in investigandis plurium quantitatum combinationibus diversis admodum utilis.

COR. XI. Æquationis cujuscunque $x^n \cdot Px^{n-1}$.

$Qx^{n-2} \&c. = 0$, omnes radices reales habentis, quadratum coefficientis termini cujusque medii majus erit rectangulo coefficientium terminorum hinc inde consistentium, si modo hoc rectangulum affirmativum sit. Nam

I. Si radices sint eadem & iisdem signis affectæ; designabit na , $n \cdot \frac{n-1}{2} a^2$, $n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^3$, &c. seriem coefficientium P, Q, R, &c. respective; per *cor. præced.* atque ideo, rationem trium quorumvis coefficientium successivarum, si dividantur sigillatim per primam ex his, exponet 1, $\frac{n-m}{m+1} a$, $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{n-m+1}{m+2} a^2$. (ubi m designat

integrum quemvis minorem n .) Sed $\left| \frac{n-m}{m+1} a \right|^2$ seu $\frac{n-m}{m+1} \cdot$

$\frac{n-m}{m+1} a^2$ majus est quam $1 \times \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{n-m+1}{m+2} a^2$, ob

$\frac{n-m}{m+1}$ majus quam $\frac{n-m+1}{m+2}$. Ergo, quadratum &c. majus est rectangulo, &c.

II. Si radices sint diversæ at iisdem signis affectæ, sumptis tribus quibuscumque coefficientibus successivis, puta R, S, T, erunt

Formæ terminorum in S².

$$1. a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + \&c. + b^2c^2d^2e^2 + \&c. \quad [C_4]$$

$$2. a^2b^2c^2de + a^2b^2c^2df + \&c. + b^2c^2d^2ef + \&c. \quad [aC_5]$$

$$3. a^2b^2cdef + a^2b^2cdeg + \&c. + b^2c^2defg + \&c. \quad [\beta C_6]$$

$$4. a^2bcdefg + a^2bcdefh + \&c. + b^2cdefgh + \&c. \quad [\gamma C_7]$$

$$5. abcdefgh + abcdefgk + \&c. + bcdefghk + \&c. \quad [\delta C_8]$$

De coefficientibus formarum in S².

1. $a^2b^2c^2d^2$ seu $abcd \times abcd$. Cum ex quatuor radicibus quatuor fiunt quadrata, erit numerus combinationum

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1; \text{ adeoque quisque terminus hujus formæ}$$

femel tantum occurrit: & totum numerum terminorum ejus exponet C_4 seu numerus combinationum sub singulis

radicibus quaternis in æquatione. (n) radicum, $= n \cdot \frac{n-1}{2}$

$$\cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \text{per cor. præced.}$$

2. $a^2b^2c^2de$ seu $abcd \times abce$. Cum ex quinque radicibus ternæ quævis fiunt quadrata, erit numerus combinationum

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \text{ quarum quæque bis occurrit, cum binæ reliquæ}$$

radices modis $\frac{2}{1}$ in factoribus disponi possunt, scilicet

$abcd \times abce$ vel $abce \times abcd$: erit igitur coefficientis termini cujusque $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times \frac{2}{1} =$ puta α , & totus numerus terminorum hujus formæ, αC_5 .

3. a^2b^2cdef seu $abcd \times abef$. Cum ex sex radicibus binæ quæque fiunt quadrata, prodit numerus combinationum $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$; & quatuor reliquæ modis $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ in factoribus disponi possunt: erit igitur coefficientis termini cujusque hujus formæ $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \times \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \beta$, & totus numerus terminorum, βC_6 .

Similiter,

4. $a^2bcdefg$ seu $abcd \times aefg$. Erit coefficientis termini cujusque hujus formæ $\frac{7}{1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \gamma$, & totus numerus terminorum γC_7 .

5. $abcdefgh$ seu $abcd \times efgh$. Erit coefficientis termini cujusque hujus formæ $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \delta$, & totus numerus terminorum δC_8 .

Formæ terminorum in RT.

1. $a^2b^2c^2de + a^2b^2c^2df + \&c. + b^2c^2d^2ef + \&c. \quad [\frac{1}{2}\alpha C_5]$
2. $a^2b^2cdef + a^2b^2cdeg + \&c. + b^2c^2defg + \&c. \quad [\frac{3}{2}\beta C_6]$
3. $a^2bcdefg + a^2bcdefh + \&c. + b^2cdefgh + \&c. \quad [\frac{3}{2}\gamma C_7]$
4. $abcdefgh + abcdefgk + \&c. + bcdefghk + \&c. \quad [\frac{1}{2}\delta C_8]$

Ubi observandum, quod omnes formas in S^2 præter primam sortitur RT.

De coefficientibus formarum in RT.

1. $a^2b^2c^2de$ seu $abc \times abcde$. erit coefficientens $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}\alpha$,

adeoque totus numerus terminorum, $\frac{1}{2}\alpha C_5$.

2. a^2b^2cdef seu $abc \times abdef$. coeff. erit $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \times \frac{4}{1} = \frac{2}{3}\beta$, adeoq. &c.

3. $a^2bcdefg$ seu $abc \times adefg$. coeff. erit $\frac{7}{1} \times \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{3}{4}\gamma$, adeoq. &c.

4. $abcdefgb$ seu $abc \times defgb$. coeff. erit $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{5}\delta$, adeoq. &c.

Hinc erit

$$S^2 = C_4 + \alpha C_5 + \beta C_6 + \gamma C_7 + \delta C_8$$

$$RT = \quad + \frac{1}{2}\alpha C_5 + \frac{2}{3}\beta C_6 + \frac{3}{4}\gamma C_7 + \frac{4}{5}\delta C_8$$

$$S^2 - RT = C_4 + \frac{1}{2}\alpha C_5 + \frac{1}{3}\beta C_6 + \frac{1}{4}\gamma C_7 + \frac{1}{5}\delta C_8. \text{ affirm.}$$

Et sic universaliter, designante Y summam productorum sub singulis (m) radicibus in æquatione (n) dimensionum, & designantibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. correspondentes coefficientes numerales quantitatum $C_{m+1}, C_{m+2}, C_{m+3}$, &c. erit, $Y^2 - XZ = C_m + \frac{1}{2}\alpha C_{m+1} + \frac{1}{3}\beta C_{m+2} + \frac{1}{4}\gamma C_{m+3}$ &c. usque ad $m + 1$ terminos. Ergo, &c.

III. Si radices sint diversæ & diversis signis affectæ; ob ingentem æquationum varietatem, hunc casum universaliter demonstrare difficillimum. Veritas tamen ejus ita per inductionem constabit.

In æquatione quadratica $x^2 \pm px + q = 0$, ubi radices sunt reales, erit $\frac{1}{4}p^2$ æquale aut majus quam q , five p^2 æquale aut majus quam $4q$, per § 29. Adeoque *a fortiori*, p^2 majus quam q .

Et multiplicando quadraticam $x^2 + px + q = 0$ per $x - c = 0$, generabitur æquatio cubica $x^3 + (p - c)x^2 + (q - pc)x - qc = 0$, & designante m numerum æqualem aut majorem quaternario, erit

$$\begin{array}{l} P^2 = p^2 - 2pc + c^2 = mq - 2pc + c^2 \\ Q = \qquad \qquad \qquad q - pc \end{array}$$

$$\text{Adeoque } P^2 - Q = \frac{mq - 2pc + c^2}{m - 1} \text{ affirm.}$$

Ubi $q - pc$ est affirmativum, per hypoth. et $\frac{m-1}{m-1} q$ est majus quam q , adeoque $\frac{m-1}{m-1} q - pc$ est affirmativum, & *a fortiori*, $\frac{m-1}{m-1} q - pc + c^2$ affirmativum.

Erit quoque

$$\begin{array}{l} Q^2 = p^2c^2 - 2pqc + q^2 = mqc^2 - 2pqc + q^2 \\ PR = \qquad \qquad \qquad qc^2 - pqc \end{array}$$

$$Q^2 - PR = \frac{mqc^2 - pqc + q^2}{m - 1} \text{ affirm.}$$

Et similiter probare licet in æquatione cubica $(x^2 - px + q)(x + c) = 0$, &c.

Multiplicando autem quadraticam $x^2 + px + q = 0$ per quadraticam $x^2 - gx + b = 0$, generabitur biquadratica $x^4 + (p - g)x^3 + (q - pg + b)x^2 + (pb - qg)x + qb = 0$, adeoque ob $g^2 = \text{vel } > 4b$, = puta nb , erit

$$\begin{aligned} P^2 &= p^2 - 2pg + g^2 = mq - 2pg + nb \\ Q &= q - pg + b \end{aligned}$$

$$\text{Adeoq. } P^2 - Q = \overline{m-1} q - pg + \overline{n-1} b \text{ affir.}$$

Itemque,

$$\begin{aligned} Q^2 &= p^2 g^2 - 2pg(q+b) + (q+b)^2 = (mn+2)qb - 2pg(q+b) + q^2 + b^2 \\ PR &= p^2 b - pg(q+b) + qg^2 = (m+n)qb - pg(q+b) \end{aligned}$$

$$\text{Adeoq. } Q^2 - PR = (\overline{mn+2} - \overline{m+n}) qb - pg(q+b) + q^2 + b^2.$$

affirmativum nempe, ob $\overline{mn+2} - \overline{m+n}$ majus quam $\overline{m+n}$, cum m & n sint quaternario majores aut saltem æquales, respective. Itemque,

$$\begin{aligned} R^2 &= p^2 b^2 - 2pqbg + q^2 g^2 = mqb^2 - 2pqgb + nq^2 b \\ QS &= qb^2 - pqgb + q^2 b \end{aligned}$$

$$R^2 - QS = \overline{m-1} qb^2 - pqgb + \overline{n-1} q^2 b \text{ affirmativum.}$$

Et multiplicando biquadraticam $x^4 + (p-g)x^3 + \&c. = 0$ per $x-e=0$, in æquatione resultante $x^5 + (p-g-e)x^4 + (q-pg+b-pc+cg)x^3 + \&c. = 0$, erit

$$\begin{aligned} P^2 &= p^2 - 2pg - 2pe + 2ge + g^2 + e^2 = mq + 2 \times \overline{-pg-pe+ge+nb+e^2} \\ Q &= q - pg - pe + ge + b = q + 1 \times \overline{-pg-pe+ge+b} \end{aligned}$$

$$P^2 - Q = \overline{m-1} q + 1 \times \overline{-pg-pe+ge+n-1b+e^2} \text{ affirmativum. Atque sic deinceps.}$$

COR. XII. Hinc in æquatione quacunque si quadratum coefficientis termini cujufvis medii fit æquale aut minus rectangulo coefficientium terminorum hinc inde consistentium, ubi hoc rectangulum fit affirmativum; indicio est, æquationem radices impossibiles fortiri. Veruntamen non valet *conversa*, ubi enim radices sunt impossibiles, potest quadratum &c. majus esse hoc rectangulo. Sic in æquatione quadraticâ $x^2 \pm px + q = 0$, radices erunt impossibiles ubi $\frac{1}{4}p^2$ fit minus quam q , at salvâ hac conditione, potest esse p^2 majus, æquale, vel minus quam q .

Hinc quoque defectus termini cujufvis medii, si modo termini hinc inde consistentes iisdem signis afficiantur, est nota radicum impossibilium. Nam quadratum, &c. in hoc casu evanescit, atque ideo minus prodit rectangulo, &c.

DE NUMERO RADICUM AFFIRMATIVARUM & NEGATIVARUM ÆQUATIONIS.

145. *Æquatio cujuscunque dimensionis cujus ultimus terminus est negativus, unam saltem habet radicem realem & affirmativam.*

Nam in æquatione $x^n . x^{n-1}$ &c. — $U = 0$, si x fit nihil, evanescuntibus omnibus terminis præter ultimum, erit valor resultans negativus; contra, crescente x a nihilo ad magnitudinem infinitam usque, terminis affirmativis tandem exsuperantibus negativos, valor resultans erit affirmativus: ergo iste valor affirmativus x qui inter crescendum efficiet omnes terminos se destruere, erit radix.

146. *Æquatio quæcunque dimensionis imparis cujus ultimus terminus est negativus, unam saltem habet radicem realem & affirmativam, per præced.*

— Quod si ultimus terminus sit affirmativus, unam saltem habet radicem realem & negativam.

Substituendo enim $-x$ pro $+x$, primus terminus evadet negativus, & terminis omnibus novæ æquationis ad alteram partem translatis, quo terminus altissimus evadat affirmativus, fiet ultimus terminus negativus, nova æquatio igitur fortietur unam radicem realem & affirmativam, & proinde data æquatio unam realem & negativam.

147. *Æquatio quæcunque dimensionis paris cujus ultimus terminus est negativus, necessario habet duas radices reales, unam affirmativam, alteram negativam.*

Habet enim unam radicem affirmativam, per § 145. Et si substituatur $-x$ pro $+x$, cum terminus altissimus (utpote dimensionis paris) sit affirmativus, nova æquatio habebit unam radicem realem & affirmativam, adeoque data æquatio alteram quoque radicem realem & negativam.

148. *Æquationis cujuscunque unam tantum mutationem signorum de $+$ in $-$ habentis, unica erit radix realis affirmativa.*

Nam quoniam ultimus terminus in hoc casu, necessario erit negativus, æquatio unam habebit radicem realem affirmativam, per § 145.

Quod si X designet summam terminorum affirmativorum, & Y summam negativorum, fiet æquatio $X - Y = 0$. Et quoniam per hypothefin, est una tantum mutatio signorum, manifestum est, quod minima potestas x in polynomio X , puta x^m , necessario transcendet omnem potestatem x in polynomio Y . Adeoque dividendo per x^m , quan-

titas $\frac{X}{x^m}$ continebit solummodo potestates affirmativas x , & $\frac{Y}{x^m}$ potestates negativas x . Unde sequitur, quod crescente vel decrescente x , perinde augebitur vel minuetur valor $\frac{X}{x^m}$; nisi X terminum unicum, nempe altissimum contineat, quo in casu, non variabitur $\frac{X}{x^m}$. Contra, crescente x , necessario minuetur valor $\frac{Y}{x^m}$, decrescente vero x , augebitur. Sit jam a radix realis affirmativa æquationis, eritque $x = a$, $X = Y$, itemque $\frac{X}{x^m} = \frac{Y}{x^m}$. Adeoque substituendo pro x numeros majores quam a , erit semper $\frac{X}{x^m} > \frac{Y}{x^m}$ adeoque $\frac{X}{x^m} - \frac{Y}{x^m}$ feu $X - Y$ affirmativum; & substituendo pro x numeros minores quam a , erit semper $\frac{X}{x^m} < \frac{Y}{x^m}$ adeoque $X - Y$ negativum. Ergo impossibile est æquationem fortiri radicem majorem minoremve quam a *.

* Vide *Dissert. Sur la resolution des æquations numeriques*, par *M. De la Grange*, *Berlin. Acad.* an. 1769, p. 314, &c.

149. *Æquationis nullas radices impossibiles habentis tot sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie mutationes de + in —, & de — in +; cæteræ negativæ sunt.*

Hanc regulam in æquationum transmutationibus & limitibus investigandis perutilem, tentando & inductione autorem invenisse, sive *Harriott* fuit, sive ut plerisque placet, *Cartesius* *, verisimile est. Demonstrationem ejus, ex generatione æquationum, ita colligere licet.

In æquatione simplici $x \pm a = 0$ est una variatio signorum de + in — ubi radix est affirmativa, & una successio de + in + ubi radix est negativa.

Et si multiplicetur $x + a = 0$, per $x - b = 0$, in æquatione quadr. resultante $x^2 - \frac{a}{b}x - ab = 0$, cujus una radix est affirmativa & altera negativa, prodit series signorum +, ±, —, prout a sit majus, æquale aut minus quam b , scilicet, vel +, +, —, vel +, —, —; adeoque in utroque casu, una variatio signorum de + in —, & una successio, vel de + in +, vel de — in —.

His vestigiis insistendo demonstrare possimus regulam in æquationibus cubicis, ut facit *M^cLaurin*, *Algeb. Part. 2*, § 20. Verùm methodum eandem profequi in æquationi-

* Regulam sic effert *Cartesius*, *Geom. Lib. 3, p. 70*. “ Ex quibus etiam cognoscitur quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque æquatione haberi possunt. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + & —; & tot falsas quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quæ se invicem sequuntur.” Contenderunt nonnulli *Cartesio* latuisse limitationem regulæ ad æquationes quæ omnes radices habent reales; at minus recte, ut ex ipsius verbis colligere licet, ex quibus, nimirum ex generatione æquationum radices reales habentium, de quibus paulo ante egerat; itemque ex eo quod non simpliciter adhibet *haberi*, at cum restrictione, *haberi posse*, nimirum in casu prædicto.

bus altiorum dimensionum, propter ambiguitatem signorum terminorum successivorum, impossibile foret. Demonstratio autem fiet universalis ope Theorematis inferentis, quod ex *Meditationibus Algebraicis* D. Waring, p. 74. expressimus.

150. Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, si multiplicetur æquatio per $x - p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, augebitur unitate numerus mutationum signorum in nova æquatione; quod si multiplicatio fiat per $x + p = 0$, ut una adhuc radix negativa addatur prioribus, idem erit numerus mutationum signorum in nova ac in data æquatione.

$$\text{Sit } x^n - Px^{n-1} - Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + Sx^{n-4} + Tx^{n-5} + \&c. = 0$$

$$x - p$$

$$x^{n+1} - Px^n - Qx^{n-1} + Rx^{n-2} + Sx^{n-3} + Tx^{n-4} + \&c. = 0.$$

Hic observandum est, quod binæ partes coefficientis termini cujusque novæ æquationis iisdem afficientur signis, ubi termini imminenti & præcedenti in data æquatione signa sunt diversa; contrariis vero afficientur signis, ubi termini imminenti & præcedenti signa sunt eadem. Sic coefficientis secundi termini novæ æquationis est $-P - p$, existente signo secundi termini datæ æquationis negativo, primi autem affirmativo; at coefficientis tertii termini est $-Q + pP$, negativum nempe, instar termini imminenti, si Q sit majus quam pP , affirmativum si secus.

Unde, si trium pluriumve terminorum successivorum datæ æquationis signa sint eadem, erunt duorum pluriumve terminorum successivorum novæ æquationis signa ambigua.

Quod si talium cujuslibet signum diversum prodeat a signo termini imminentis datæ æquationis, termini proxime insequentis quoque signum diversum erit a signo termini huic imminentis. *Ex. gr.* Sit terminus quintus novæ æquationis $(S - pR) x^{n-3}$ negativus,

Erit - - - - S minus quam pR

Sed per *Cor. XI*, est RT minus quam S^2

Adeoque - - - RST minus quam pRS^2

Sive - - - - T minus quam pS .

Et proinde terminus sextus $(T - pS) x^{n-4}$ negativus erit.

Et sic deinceps. Erit igitur series signorum

datæ æquat. +, —, —, +, +, +, +, &c.

novæ æquat. +, —, +, +, —, —, —, &c.

Nimirum a termino primo ad quartum, idem est numerus variationum in utrisque, idque sive tertius terminus novæ æquationis sit affirmativus sive negativus; a quarto verò ad quintum in nova æquatione, accedit una variatio quæ non est in data; in reliquis terminis idem prodit numerus successionum in utrisque. Ergo, &c.

Simili ratiocinio constat, quod si multiplicetur æquatio $x^n - Px^{n-1} - \&c. = 0$ per $x + p = 0$, idem resultabit numerus mutationum signorum in nova ac in data æquatione.

Sic multiplicando quadraticam $x^2 + px + q = 0$ per $x - c = 0$, in æquatione cubica resultante $x^3 + (p - c)x^2 + \&c. = 0$

D d

$x^2 + (q - pc)x - qc = 0$, cujus una radix est affirmativa, reliquæ negativæ; fit p majus quam c , potest esse q majus vel minus quam pc , adeoque series signorum $+$, $+$, $+$, $-$. Quod si p sit minus quam c , erit quoque q minus quam pc , & series signorum $+$, $-$, $-$, $-$. Nimirum in utroque casu una variatio signorum & duæ successiones, ut æquum est. Atque ita in æquationibus altiorum dimensionum regulam demonstrare licet.

151. Ubi vero radices aliquæ impossibiles sunt, non valet regula *Cartesiana*, nisi quatenus impossibiles illæ quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ pro *ambiguis* habeantur. Ut in æquatione $x^3 + qx - r = 0$, interponendo $\pm 0x^2$ quo compensetur defectus secundi termini, erit series signorum vel $+$, $+$, $+$, $-$, vel $+$, $-$, $+$, $-$; nimirum in priore casu, si signa spectes, una radix affirmativa & duæ negativæ, in posteriore, tres affirmativæ. Sunt ergo duæ *impossibiles*, quæ pro ambiguitate sua, priore casu negativæ, posteriore affirmativæ esse videntur.

Aliquando augendo numerum radicum æquationis deteguntur radices impossibiles, si quæ in ea delitescunt. Sic in æquatione $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$, signa indicant radicem unam esse affirmativam, & duas negativas; multiplicando autem per $x - 2p = 0$, prodit $x^4 - px^3 + p^2x^2 - (6p^3 - q)x + 2pq = 0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen si mutationum signorum spectes, affirmativas quatuor; sunt ergo duæ impossibiles. Cæterum in his & talibus exemplis radices impossibiles existere, ex Cor. XII, statim innotescit.

152. Regulam satis facilem tradit *Newtonus* pro inveni-
endo numero radicum impossibilium, at minus accuratam,

quam idcirco prætereundam censui. De hac tale profert
judicium *Waring*, in hisce versatissimus, *Med. Algeb.* p. 47.

“ Hæc methodus in quadraticis æquationibus verum præ-
bet numerum impossibilium radicum; in cubicis autem
probabilitas inveniendi impossibiles radices non videtur
majorem habere rationem ad probabilitatem fallendi
quam 2 ad 1. In æquationibus autem multo superiorum
dimensionum verum impossibilium radicum numerum
perraro detegit.”

Sic in æquatione $x^3 - 2x + 4 = 0$, signorum subscrip-
torum series secundum regulam *Newtonianam*, indicaret
nullas dari radices impossibiles, licet factorem quadraticum
habet $x^2 - 2x + 2 = 0$ cujus radices per eandem reg. sunt
impossibiles.

DE TRANSMUTATIONIBUS ÆQUATIONUM.

153. I. *Æquationis cujusvis radices omnes affirmativas in ne-
gativas, & negativas in affirmativas mutare.*

Fiet hoc mutando tantum signa terminorum alternorum
a secundo incipientium. Nam si substituatur $-x$ pro $+x$
in æquatione quacunque dimensionis *paris*, mutabuntur
signa terminorum alternorum a secundo incipientium, quos
nempe occupant impares potestates x ; signis reliquorum
manentibus. At si substituatur $-x$ pro x in æquatione
dimensionis *imparis*, mutabuntur tantum signa terminorum
alternorum a primo incipientium, adeoque transponendo
omnes terminos cum signis mutatis, quo terminus altissi-
mus novæ æquationis evadat affirmativus, mutabuntur, ut
in præcedenti casu, signa terminorum alternorum tantum
a secundo incipientium.

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, cujus si signa spectes, tres sunt radices affirmativæ, mutando signa secundi & quarti termini, fit $x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30 = 0$, ejusque radicum una tantum affirmativa, reliquæ negativæ, ut æquum est; adeoque in priore casu, prodeunt radices $+1, +2, +3$, & -5 , in posteriore, $-1, -2, -3$, & $+5$, mutatis nimirum radicibus affirmativis in negativas, & vice versâ.

Sic quoque æquatio $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, tres radices affirmativas habens, mutando signa secundi quarti & sexti termini, fit $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 4 = 0$, cujus tres prodeunt radices negativæ, reliquæ affirmativæ. Ex quinque autem radicibus duæ sunt impossibiles, quæ in priore æquatione inter affirmativas latebant, in posteriore latent inter negativas; ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

154. Possumus quoque supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate *utcumque componi*, & perinde pro eâ substituere quod æquipollens esse fingitur. Et hoc pacto transmutationes aliæ eliciendæ sunt quæ diversis usibus inserviunt.

155. II. *Radices æquationis data quadam quantitate augere, vel diminuere, vel de data quantitate subducere.*

Supponamus radicem æquationis æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ & incognitæ alicujus quantitatis, deinde, substituendo pro radice in æquatione datâ id quod æquipollens esse fingitur, emerget æquatio nova cujus radices evadent majores vel minores radicibus datæ hac cognitâ quantitate. Sic in æquatione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, si radices cognita quantitate c augeri vellem, ponendo $x + c = y$, & perinde substituendo $y - c$ pro x , &c. emerget æquatio,

$$\left. \begin{array}{r} x^3 - \\ - px^2 \\ + qx \\ - r \end{array} \right\} y^3 - 3cy^2 + 3c^2y - c^3 \left. \begin{array}{r} - py^2 \\ + 2pcy - pc^2 \\ + qy - qc \\ - r \end{array} \right\} = 0.$$

Et similiter, si radices cognita quantitate c diminui vellem, substituendo $y + c$ pro x , aut si radices de cognita quantitate c subducere vellem, substituendo $c - y$ pro x , fiet quæsitum.

Atque in genere, radices æquationis (n) dimensionum augere, &c. possumus cognita quadam quantitate c , substituendo pro potestatibus x singulis in terminis æquationis datæ potestates correspondentes binomii $y + c$, ductas in singulorum terminorum coefficients p, q, r, s , &c. respective.

156. Cæterum æquationis transformatæ termini absque involutione facile consilari possunt.

Nam signis terminorum probè observatis, substituendo tantum c pro x in æquatione data habebitur terminus ultimus. Et multiplicando termini ultimi partem unamquamque per indicem c in ista parte & dividendo factum per c , habebitur coefficientis penultimi. Dein rursus multiplicando penultimi partem unamquamque per indicem c in ista parte, jam unitate minorem quam prius, & factum dividendo per $2c$, habebitur coefficientis antepenultimi. Atque ita, semper multiplicando termini novissimi partem unamquamque per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per c ductum in numeros unitate majores quam prius, habebitur termini insequentis coefficientis.

157. Atque ita *Newtonus* methodum generalem investigandi *limites* inter quos consistunt radices æquationum docens, brevitatis studiosus, ex ipsa æquatione data, tan-

quam ex termino ultimo, coefficientes terminorum reliquorum æquationis transformatæ immediate deducit. *Multiplicando utique æquationis terminum unumquemque per numerum dimensionum ejus, & dividendo factum per radicem æquationis, &c.* Nisi quod facta successive prodeuntia dividit per radicem æquationis solam, quæ dividi debuerunt per duplam radicem, triplam radicem, &c. respective. Et proinde, minuendi gratiâ, terminos resultantes per maximos divisores communes, siquos fortiuntur, insuper dividit.

158. 1. *Hoc pacto efficere possumus ut radicem aliquæ vel omnes quæ prius erant negativæ evadant affirmativæ, augendo utique radices donec augmentum c aliquos vel omnes radices negativas transcendat; vel etiam ut ex affirmativis aliquæ vel omnes evadant negativæ, minuendo utique radices, donec decrementum, &c.* Nam si omnis valor y fiat affirmativus, necesse est ut $x + c = y$, sit affirmativus, adeoque ut c majus sit omni radice negativa x . Atque ita in cæteris.

Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, si radices unitate augeri vellem, scribendo $y - 1$ pro x , æquationis prodeuntis $y^4 - 5y^3 - 10y^2 + 80y - 96 = 0$, radices erunt 2, 3, 4, -4 , quæ prius erant 1, 2, 3, -5 , unitate jam factæ majores. Pro x vero scribendo $y - 6$, prodiisset æquatio $y^4 - 25y^3 + 215y^2 - 695y + 504 = 0$, cujus radices fuissent 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ. Quod si pro x scripsissem $y + 1\frac{1}{2}$ prodiisset æquatio $y^4 + 5y^3 - 10y^2 - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0$, cujus radices ita diminutæ evasissent $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+1\frac{1}{2}$, $-6\frac{1}{2}$, duæ nimirum affirmativæ ac duæ negativæ. Et pro eodem scribendo $y + 4$, radices jam numero quaternario diminutæ in æ-

quatione resultante $y^4 + 15y^3 + 65y^2 + 105y + 54 = 0$,
evalissent $-3, -2, -1, -9$, negativæ omnes.

159. 2. *Et hoc modo augendo vel diminuendo radices siquæ impossibiles sunt, hæc aliquando deteguntur.*

Sic in æquatione $x^3 - 3a^2x - 3a^3 = 0$, erit series signorum $+, +, -, -$, scilicet in utroque casu, si signa spectes, una radix affirmativa, reliquæ negativæ. At si augeas radices quantitate a , scribendo $y - a$ pro x , in æquatione resultante $y^3 - 3ay^2 - a^3 = 0$, erit series signorum $+, -, +, -$, nimirum $+, -, +, -$, vel $+, -, -, -$, adeoque in priore casu tres radices affirmativæ, in posteriore una tantum. Sunt ergo duæ impossibiles, quæ pro ambiguitate sua modo inter affirmativas, modo inter negativas latent.

160. 3. *Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere.*

Nam si secundus terminus æquationis sit negativus, constat per COR. II. quod radices affirmativæ præpollent negativis, radices igitur minuendæ sunt donec affirmativæ æquipollent negativis; aut si terminus secundus sit affirmativus, radices augendæ sunt donec negativæ æquipollent affirmativis; hoc vero fiet in utroque casu, si coefficientem secundi termini æquationis propositæ cum proprio signo per numerum dimensionum æquationis divisam subducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Nam

Proponatur æquatio $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} \&c. = 0$,
cujus secundus terminus est negativus; fiat $x - c = y$, &

substituendo $y + c$ pro x , proveniet æquatio $y^n \frac{+nc}{-p} \} y^{n-1}$

$$\left. \begin{array}{l} + n \cdot \frac{n-1}{2} c^2 \\ - p \cdot \frac{n-1}{1} c \\ + q \end{array} \right\} y^{n-2} \&c. = 0. \text{ Fingatur jam coefficientem}$$

secundi termini hujus nihil esse, seu $nc - p = 0$, adeoque

$$c = \frac{p}{n}; \& \text{ substituto hoc valore } c, \text{ fiet } nc - p = \frac{np}{n} - p$$

$$= p - p = 0, \text{ adeoque evanescet secundus terminus novæ æquationis. Et similiter, si secundus terminus datæ}$$

æquationis sit affirmativus, vice $y - c$ substituendo $y - \frac{p}{n}$

$$\text{pro } x, \text{ evanescet } -\frac{np}{n} + p \text{ coefficiens secundi termini æ-}$$

quationis novæ. In omni autem casu valet hæc regula,

sive radices sint reales sive impossibiles. Ut si proponatur

$$\text{æquatio } x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0, \text{ cujus una radix est}$$

furda, reliquæ impossibiles, substituto $y + \frac{4}{3}$ pro x , provenit

$$y^3 + 4y^2 + \frac{16}{3}y + \frac{64}{27}$$

$$- 4y^2 - \frac{32}{3}y - \frac{64}{9}$$

$$+ 4y + \frac{16}{3}$$

$$- 6$$

$$\hline y^3 * - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0.$$

161. Exterminatio secundi termini resolutioni faciliori æquationum cubicarum & biquadraticarum inservit. Hoc pacto quoque, æquatio quadratica affecta sublato termino secundo ad normam quadraticæ puræ reduci potest. Sic in æquatione $x^3 - px + q = 0$, substituendo $y + \frac{1}{2}p$ pro x , prodit $y^3 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$, adeoque $y^3 = \frac{1}{4}p^2 - q$, & extracta radice $y = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}p^2 - q}$ adeoque $x = y + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p \pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}p^2 - q}$, ut antea § 29.

162. 4. Eadem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli, quod in constructionibus quibusdam geometricis postulatur; inveniendò nempe valorem c qui coefficientem tertii termini æquationis transformatæ (n) dimensionum, destruet. Fingatur enim coefficientem tertii termini

$$n \cdot \frac{n-1}{2} c^2 - p \cdot \frac{n-1}{1} c + q = 0, \text{ adeoque concinnando,}$$

$$c^2 - \frac{2p}{n} c + \frac{2q}{n \cdot n-1} = 0. \text{ Et per reductionem, erit}$$

$$c = + \frac{p}{n} \pm \sqrt{\frac{p^2}{n^2} - \frac{2q}{n \cdot n-1}}. \text{ Ut si tollendus sit tertius}$$

terminus æquationis præcedentis $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$,

$$\text{prodit } c = + \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{8}{6}} = + \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} = + \frac{2}{3} \text{ vel}$$

$$+ 2, \text{ quamobrem vice } y + c \text{ scribi debet } y + \frac{2}{3} \text{ vel } y + 2$$

pro x , et in utroque casu tolletur tertius terminus; nam si

E e

pro x scribatur $y + \frac{2}{3}$ orietur hæc æquatio $y^3 - y^2 * - \frac{137}{27}$
 $= 0$, si scribatur $y + 2$, orietur hæc $y^3 + 2y^2 * - 6 = 0$.

Simili ratione, tolli possit 4^{us} terminus, inveniendò valorem idoneum c per resolutionem æquationis cubicæ; quintus terminus per resolutionem biquadraticæ; & sic deinceps. Verùm hæc transmutationes ob calculum difficilem adhiberi non solent.

Cæterum observandum est, quod hac methodo plures terminos intermedios *simul* tollere non licet, cum singulis terminis tollendis proprius desideratur valor c . Methodum generalem at valde operosam, omnes terminos intermedios tollendi, tradit Bezout, *Mem. de l'Acad.* an. 1772.

163. III. *Radices æquationum per datos numeros multiplicare vel dividere.*

Si radices æquationis $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} \&c. + u = 0$, multiplicandæ forent per numerum c , fiat $cx = y$, deinde

substituendo $\frac{y}{c}$ pro x , proveniet æquatio $\frac{y^n}{c^n} - \frac{py^{n-1}}{c^{n-1}}$
 $+ \frac{qy^{n-2}}{c^{n-2}} \&c. + u = 0$. Sive $y^n - pcy^{n-1} + qc^2y^{n-2}$

$\&c. + c^n u = 0$, cujus radices sunt c^{10} majores quam ante.

Et rursus si dividendæ sint radices per c , fiat $\frac{x}{c} = y$, de-

inde substituendo cy pro x , proveniet $y^n - \frac{py^{n-1}}{c} + \frac{qy^{n-2}}{c^2}$

$$\&c. + \frac{u}{c^n} = 0.$$

Hinc colligere licet, quod æquationis radices per datum aliquem numerum multiplicare vel dividere possumus, multiplicando vel dividendo seriem terminorum æquationis incipiendo a primo termino, per seriem numerorum continue proportionalium $1, c, c^2, c^3, \&c. c^n$, respective.

164. 1. Hoc pacto, fractiones semper tollere possumus, & tamen efficere ut terminus altissimus æquationis resultantis coefficiente careat. Sic multiplicando radices æquationis $x^3 + \frac{x^2}{f} + \frac{x}{g} + \frac{u}{h} = 0$, per c , prodit $y^3 + \frac{cy^2}{f} + \frac{c^2y}{g} + \frac{c^3u}{h} = 0$, hoc est, substituendo fgb pro c , si modo f, g & h , sint numeri ad invicem primi, $y^3 + gby^2 + f^2gb^2y + f^3g^3b^2u = 0$. Quod si f, g & h non sint ad invicem primi, valorem depressiorem c usurpare licet. Sic in æquatione præcedente $y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, substituendo $\frac{1}{3}z$ pro y , provenit æquatio $\frac{z^3}{27} - \frac{4z}{9} - \frac{146}{27} = 0$, five $\frac{z^3 - 12z - 146}{27} = 0$, & rejecto terminorum communi denominatore, $z^3 - 12z - 146 = 0$, cujus radices sunt triplo majores radicibus datæ æquationis. Atque ita in æquatione $y^4 - \frac{43}{8}y^3 + \frac{75}{8}y - \frac{851}{256} = 0$, ad

tollendas fractiones scribe $\frac{1}{2}x$ pro y , & orietur $x^3 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$.

165. 2. *Et hoc pacto possunt radicales aliquando tolli, ubi eadem quantitas radicalis terminos alternos, vel a primo termino vel a secundo incipientes, ingreditur.* Sic in æquatione $x^3 \sqrt{3} - 2x \sqrt{3} + 1 = 0$, scribendo $\frac{y}{\sqrt{3}}$ pro x , prodit $\frac{y^3 \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{2y \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 1 = 0$, five $y^3 - 6y + 3 = 0$. Itemque in æquatione $x^3 - p \sqrt{a} x^2 + qx - r \sqrt{a} = 0$ substituendo $\frac{y}{\sqrt{a}}$ pro x , emergit $y^3 - pay^2 + qay - ra^2 = 0$. Sic et in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, scribendo $y \sqrt{3}$ pro x , prodit $3y^3 \sqrt{3} - 2y \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, feu $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

166. IV. *Æquationis radices in earum reciprocas transformare.*

Sic æquatio novissima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, cujus prima radix est -1 , & reliquæ $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{6}$; scribendo $\frac{1}{z}$ pro y , evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, five concinnando & ordinando, $z^3 - 2z^2 + 3 = 0$, ejusque prima radix -1 , & reliquæ $\frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{6 \times \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{6}}{12} = \frac{6}{3 \pm \sqrt{-3}}$ nempe radicum præcedentium reciproca.

167. 1. *Hoc pacto radix minima in maximam converti potest, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in limitibus radicum exquirendis.*

168. 2. *Potest etiam æquationis terminus penultimus hac operatione tolli, si modo secundus prius tollatur; ut factum vides in exemplo novissimo. Aut si antepenultimum tolli cupias, id fiet si modo tertium prius tollas.*

169. V. *Invenire æquationem cujus radices sint quadrata radicum datæ æquationis.*

Proponatur æquatio cubica $x^3 - Px^2 + Qx - R = 0$, cujus radices sint a, b, c , maximam designante a ; & mutando signa terminorum alternorum orietur æquatio $x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$, cujus radices idcirco erunt $-a, -b, -c$. Deinde his æquationibus in se ductis, emerget æquatio 6 dimensionum $(x^3 + Qx)^2 - (Px^2 + R)^2$ seu $x^6 + (2Q - P^2)x^4 + (Q^2 - 2PR)x^2 - R^2 = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b)(x - c)(x + c)$ seu $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)$, cujus termini alterni defunt; evanescentibus nimirum summâ radicum $a, -a, b, -b$, &c. summâ contentorum sub singulis ternis, $-aab, +aab$, &c. sub singulis quinis, $+aabb, -aabb$, &c. ob dimensionem æquationis resultantis semper parem. Minuendi gratiâ igitur substitue hinc inde y pro x^2 , & deprimetur æquatio resultans ad cubicam $y^3 + (2Q - P^2)y^2 + (Q^2 - 2PR)y - R^2 = (y - a^2)(y - b^2)(y - c^2)$, cujus radices sunt a^2, b^2, c^2 , ut manifestum est. Et sic universaliter: Sit æquatio $x^n - Px^{n-1} + Qx^{n-2} - Rx^{n-3} + \&c. = 0$, eritque æquatio resultans $y^n + (2Q - P^2)y^{n-1} + (2S - 2PR + Q^2)y^{n-2} + \&c. = 0$.

170. Porro, hanc operationem instituendo in æquationem *quadratorum*, tanquam datam, emerget æquatio cujus radices erunt *biquadrata* radicum æquationis datæ; eandemque iterando in æquationem proxime inventam, tanquam datam, æquationes *per saltum* invenire licet cujus radices sint *potestates* $8^{væ}$, $16^{mæ}$, $32^{mæ}$, $64^{mæ}$, &c. radicum datæ æquationis, absque tædio omnes potestates intermedias radicum inveniendi, per Formulas, § 79.

Sic æquatio proposita, sublato termino secundo, erit $x^3 + Qx - R = 0$, unde, evanescentibus terminis æquationum resultantium quos intrant dimensiones P, erunt *

$$y^3 + 2Qy^2 + Q^2y - R^2 = 0, \text{ æquat. quadrat.}$$

$$y^3 - 2Q^2y^2 + (Q^4 + 4QR^2)y - R^4 = 0, \text{ æquat. 4. potest.}$$

$$y^3 - (2Q^4 - 8QR^2)y^2 + (Q^8 + 8Q^5R^2 + 12Q^2R^4)y - R^8 \} = 0, \text{ æq. 8 potest.}$$

$$y^3 - (2Q^8 - 48Q^5R^2 + 40Q^2R^4)y^2 + \&c. = 0, \text{ æq. 16 pot.}$$

$$y^3 - (2Q^{16} - 224Q^{13}R^2 + 2288Q^{10}R^4 - 4224Q^7R^6 + 1320Q^4R^8 - 32QR^{10})y^2 + \&c. = 0, \text{ æq. 32 potest.}$$

$$y^3 - (2Q^{32} - 960Q^{29}R^2 + 58464Q^{26}R^4 - 1048320Q^{23}R^6 + 7104240Q^{20}R^8 - 19997120Q^{17}R^{10} + 23772800Q^{14}R^{12} - 11410944Q^{11}R^{14} + 1961256Q^8R^{16} - 93632Q^5R^{18} + 672Q^2R^{20})y^2 + \&c. = 0, \text{ æq. 64 pot.}$$

* Vide Bertrand, *Elem. Mathematiques*, Geneva, 1778, vol. II, p. 501.

Unde mutando signa terminorum secundorum æquationum resultantium habebitur summa potestatum 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. radicum æquationis datæ.

171. *Et hoc pacto, radices impossibiles, siquæ sunt, ut plurimum detegere possumus.*

Nam si æquationis datæ nullæ radices impossibiles sint, singulorum radicum quadrata erunt affirmativa, adeoque termini æquationis quadratorum, vicibus alternis affirmativi & negativi. Ubi igitur in æquatione quadratorum occurrit signorum similium successio, indicio est æquationem datam radices impossibiles fortiri. Et hoc pacto semper detegetur impossibilitas radicum æquationis cujuscunque ubi P deleta, Q fit affirmativum. Sic habitâ æquatione $x^3 + 6x - 20 = 0$, prodit æquatio quadratorum $y^3 + 12y^2 + 36y - 400 = 0$, quæ duas habet signorum similium successiones. Ergo, &c. Quòd si Q negativum fit, licet radices sint impossibiles, nulla deprehendi potest signorum successio in æquatione quadratorum; verum operationem continuando, in cubicis saltem, impossibilitatem radicum semper deteget æquatio biquadratorum, ubi R^2 fit majus quam $\frac{1}{4}Q^3$, evadente tertio termino hujus $(Q^4 + 4QR^2)$ y negativo. Et similiter in æquationibus altioribus casus determinare licet, ubi radicibus impossibilibus detegendis impar erit hæc methodus. Sic habitâ æquatione $x^3 - 2x + 4 = 0$, prodit æquatio quadratorum $y^3 - 4y^2 + 4y - 16 = 0$, quæ nullam habet signorum similium successione; at in æquatione biquadratorum $y^3 - 8y^2 - 112y - 256 = 0$, duæ prodeunt successiones. Ergo, &c.

172. Numerus autem successionum similium signorum semper æqualis vel minor erit numero radicum impossibilium.

Sint enim radices impossibiles $a + b\sqrt{-1}$ & $a - b\sqrt{-1}$, harum quadrata erunt $a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}$ & $a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{-1}$ respective, five, (posito $a^2 - b^2 = A$, & $2ab = B$) $A + B\sqrt{-1}$ & $A - B\sqrt{-1}$ *; ubi A erit affirmativum vel negativum, prout a^2 sit majus minusve quam b^2 . At multiplicando factores $x \pm A + B\sqrt{-1}$ & $x \pm A - B\sqrt{-1}$ in se generabitur æquatio quadratica $x^2 \pm 2Ax + A^2 + B^2 = 0$.

* Radices binas impossibiles æquationis algebraicæ ad formam $A \pm B\sqrt{-1}$ reduci posse, primus, ex calculo integrali demonstravit *D'Alembert*, *Mem. Acad. Berlin*, 1746. Hunc secutus est *Euler*, *Mem.* 749; & *Foncenex*, *Mem. Turin*, 1760; cujus demonstrationem ex principiis trigonometricis petitam impugnat *J. a Grange*, *Mem. Berlin*, 1772, aliamque proponit; contra vero tuctur *Bertrand*, *Elemen. des Mathematiques*, vol. 2, p. 489. Hujus reductionis adeo decantata veritatem, ex principiis algebraicis sic colligere licet.

Æquationis quadraticæ $x^2 - px + q = 0$, radices impossibiles sunt $\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. Abbreviandi gratiâ, sit $\frac{1}{2}p^2 - q = -r$, eritque $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} = \sqrt{-r} = \sqrt{r} \cdot \sqrt{-1}$, adeoque posito $\frac{1}{2}p = a$ & $\sqrt{r} = b$, radices quadraticæ impossibiles formam induent $a \pm b\sqrt{-1}$. Et quoniam æquationis cujuscunque algebraicæ radices impossibiles consari necesse est per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, involutionem aut evolutionem quantitatum impossibilium five simplicium five mixtarum; designantibus A & B quantitatum per hæc operationes resultantium partes reales cum propriis signis, erit,

$$\text{I. } \frac{a + b\sqrt{-1}}{\pm g + b\sqrt{-1}} = (a \pm g) + (b \pm b)\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}.$$

$$\text{II. } \frac{a + b\sqrt{-1}}{\times g + b\sqrt{-1}} = (ag - bb) + (bg + ab)\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1}.$$

$$\text{III. } \frac{a + b\sqrt{-1}}{g + b\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(g - b\sqrt{-1})}{(g + b\sqrt{-1})(g - b\sqrt{-1})} = \frac{(ag + bb) + (bg - ab)\sqrt{-1}}{g^2 - b^2} = A + B\sqrt{-1}.$$

in qua successiones signorum similium sunt duæ vel nullæ ;
ergo, &c. Et similiter in æquationibus altioribus demon-
strare licet.

$$\begin{aligned} \text{IV. } (a + b\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} &= a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} (b\sqrt{-1}) + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1}{2} \\ & a^{\frac{m}{n}-2} (b\sqrt{-1})^2 + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1 \cdot \frac{m}{n}-2}{2 \cdot 3} a^{\frac{m}{n}-3} (b\sqrt{-1})^3 \\ & + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1 \cdot \frac{m}{n}-2 \cdot \frac{m}{n}-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{\frac{m}{n}-4} (b\sqrt{-1})^4 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Hujus seriei terminos impares occupant potestates pares quantitatis $b\sqrt{-1}$,
& vice versa. Sed potestates pares evadunt $-b^2, +b^4, -b^6$, &c. omnes ni-
mirum reales, impares vero evadunt $+b\sqrt{-1}, -b^3\sqrt{-1}, +b^5\sqrt{-1}$, &c.
seu $(+b - b^3 + b^5 - \text{\&c.}) \sqrt{-1}$. Adeoque aggregatum terminorum seriei

imparium $a^{\frac{m}{n}} - \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1}{2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 + \text{\&c.}$ designare potest A ; parium

vero $\left(\frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b - \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1 \cdot \frac{m}{n}-2}{2 \cdot 3} a^{\frac{m}{n}-3} b^3 + \text{\&c.} \right) \sqrt{-1}$, de-
signare potest B $\sqrt{-1}$.

Radix igitur ex his operationibus resultans semper prodibit formæ $A + B\sqrt{-1}$,
cui germana exsurget formæ $A - B\sqrt{-1}$, per Cor. VII. Ergo, &c.

Eadem quoque reductio valet in impossibilibus *exponentialibus*, seu quarum in-
dices sunt irrationales vel impossibiles, velut $(a \pm b\sqrt{-1})^g + b\sqrt{-1}$. Hunc
vero casum prætermittimus, quippe qui in Elementis Algebræ parum sit utilis,
ejusque demonstratio non nisi ex principiis trigonometricis & logisticis petenda
videtur. Si quis tamen desiderat, consulat *Aud. cit.* aut *Fenn's Elements of Specious*
Arithm. Dublin, 1772, p. 222.

173. VI. *Invenire æquationem cujus radices sint quadrata differentiarum radicum datæ æquationis.*

Proponatur æquatio $x^3 - Px^2 + Qx - R = 0$, cujus radices sint a, b, c ; erunt differentiæ radicum $a - b, b - a, a - c, c - a, b - c, c - b$; seu abbreviandi gratiâ, $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \gamma, -\gamma$. Adeoque erit $(y - \alpha)(y + \alpha)(y - \beta)(y + \beta)(y - \gamma)(y + \gamma)$ seu $(y^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2)(y^2 - \gamma^2) = y^6 - P'y^4 + Q'y^2 - R' = 0$, evanescentibus nimirum terminis alternis. Substitue iterum z pro y^2 , & emerget $(z - \alpha^2)(z - \beta^2)(z - \gamma^2) = z^3 - P'z^2 + Q'z - R' = 0$, cujus radices sunt $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, quadrata nempe differentiarum radicum datæ æquationis, ut manifestum est. Et sic universaliter: æquationis $x^n - Px^{n-1} + Qx^{n-2} - \&c. = 0$, erit numerus differentiarum radicum $= n \times \frac{n-1}{2}$, & proinde æquatio quadratorum differentiarum erit $n \cdot \frac{n-1}{2}$ dimensionum.

Jam quo eruantur coefficientes, P', Q', R' , erit Summa radicum $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 =$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) =$
 Adeoque $P' = 2(P^2 - 2Q) - 2Q = 2P^2 - 6Q$.

Summa rect. sub binis rad. $(a - b)^2 (a - c)^2 + (a - b)^2 (b - c)^2 + (a - c)^2 (b - c)^2$

$$= \begin{cases} a^4 - 2a^3(b + c) + 3a^2b^2 \\ b^4 - 2b^3(a + c) + 3a^2c^2 \\ c^4 - 2c^3(a + b) + 3b^2c^2 \end{cases}$$

1. $a^4 + b^4 + c^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2Q^2.$
2. $- 2(a^3 \times \overline{b+c} + b^3 \times \overline{a+c} + c^3 \times \overline{a+b}) =$
 $= - 2(a^3 \times \overline{P-a} + b^3 \times \overline{P-b} + c^3 \times \overline{P-c}) =$
 $= - 2(a^3 + b^3 + c^3 \times P - \overline{a^4 + b^4 + c^4}) = - 2P^3Q + 2PR + 4Q^2.$
3. $+ 3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 3(\overline{ab+ac+bc^2} - 2abc \times \overline{a+b+c}) =$
 $= 3(Q^2 - 2PR) = 3Q^2 - 6PR.$

Adeoque $Q' \Rightarrow \begin{cases} P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2Q^2 \\ - 2P^3Q + 2PR + 4Q^2 \\ - 6PR + 3Q^2 \end{cases}$

$P^4 - 6P^2Q \quad * \quad + 9Q^2.$

Summa content. sub ternis rad. $(a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2.$

$$= \begin{cases} a^4b^2 - 2a^4bc + 2a^3b^2c - 2a^3b^3 - 6a^2b^2c^2. \\ a^4c^2 - 2b^4ac + 2a^3bc^2 - 2a^3c^3 \\ b^4a^2 - 2c^4ab + 2b^3a^2c - 2b^3c^3 \\ b^4c^2 \quad \quad \quad + 2b^3ac^2 \\ c^4a^2 \quad \quad \quad + 2c^3a^2b \\ c^4b^2 \quad \quad \quad + 2c^3ab^2 \end{cases}$$

1. $a^4 \times \overline{b^2+c^2} + b^4 \times \overline{a^2+c^2} + c^4 \times \overline{a^2+b^2} =$
 $= a^4 \times \overline{P^2 - 2Q - a^2} + b^4 \times \overline{P^2 - 2Q - b^2} + c^4 \times \overline{P^2 - 2Q - c^2} =$
 $= (a^4 + b^4 + c^4) P^2 - (a^4 + b^4 + c^4) 2Q - (a^6 + b^6 + c^6) =$
 $= - 2P^3R + P^2Q^2 + 4PQR - 2Q^3 - 3R^2.$

$$2. - 2(a^3 + b^3 + c^3)abc = - 2(P^3 - 3PQ + 3R)R = \\ = - 2P^3R + 6PQR - 6R^2.$$

$$3. 2abc(a^2 \times \overline{b+c} + b^2 \times \overline{a+c} + c^2 \times \overline{a+b}) = \\ = 2R(\overline{a^2+b^2+c^2} \times P - \overline{a^3+b^3+c^3}) = 2PQR - 6R^2.$$

$$4. - 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) = \\ = - 2(\overline{ab+ac+bc^3} - 3(a^2 \times \overline{b+c} + b^2 \times \overline{a+c} + c^2 \times \overline{a+b}) - \\ - 6a^2b^2c^2) = 6PQR - 2Q^3 - 6R^2.$$

$$5. - 6a^2b^2c^2 = - 6R^2.$$

Adeoque harum summa seu $R' = - 4P^3R + P^2Q^2 + 18PQR - 4Q^3 - 27R^2$. Unde prodit æquatio quadr. different. $z^3 - (2P^2 - 6Q)z^2 + (P^4 - 6P^2Q + 9Q^2)z + 4P^3R - P^2Q^2 - 18PQR + 4Q^3 + 27R^2 = 0$.

174. Tollendo autem terminum secundum datæ æquationis, formam induet simpliciore æquatio quadratorum differentiarum, nempe

$$z^3 + 6Qz^2 + 9Q^2z + 4Q^3 + 27R^2 = 0.$$

175. Proponatur æquatio biquadratica $x^4 + Qx^3 - Rx^2 + S = 0$, eritque æquatio resultans $z^5 - P'z^3 + Q'z^4 - R'z^3 + S'z^2 - T'z + V' = 0$.

Jam quo eruantur hujus coefficientes, erit

$$P' = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \\ = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ = 3(*) - 2Q = - 8Q.$$

$$Q' = (a-b)^2 (a-c)^2 + (a-b)^2 (a-d)^2 + \&c. \\ + (a-c)^2 (b-c)^2 + \&c. \&c.$$

$$= \begin{cases} 3a^4 - 4a^3 \times \overline{b+c+d} + 8a^2b^2 - 2a^2 \times \overline{bc+bd+cd} + 12abcd, \\ 3b^4 - 4b^3 \times \overline{a+c+d} + 8a^2c^2 - 2b^2 \times \overline{ac+ad+cd} \\ 3c^4 - 4c^3 \times \overline{a+b+d} + 8a^2d^2 - 2c^2 \times \overline{ab+ad+bd} \\ 3d^4 - 4d^3 \times \overline{a+b+c} + 8b^2c^2 - 2d^2 \times \overline{ab+ac+bc} \\ + 8b^2d^2 \\ + 8c^2d^2 \end{cases}$$

$$1. \quad 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = 3(2Q^2 - 4S) = 6Q^2 - 12S.$$

$$2. \quad -4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)P - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \\ = 4(2Q^2 - 4S) = 8Q^2 - 16S.$$

$$3. \quad +8(a^2b^2 + a^2c^2 + \&c.) = 8(Q^2 + 2S) = 8Q^2 + 16S.$$

$$4. \quad -2a(abc + abd + acd) - 2b(abc + \&c.) - \&c. \&c. \\ = -2(a + b + c + d)R + 8abcd = +8S.$$

$$5. \quad +12abcd = 12S. \quad \text{Adeoq. } Q' = 22Q^2 + 8S.$$

Et cæteris coefficientibus R', S', T', V' fimiliter investigatis, prodit æquatio quadratorum differentiarum,

$$z^6 + 8Qz^5 + (22Q^2 + 8S)z^4 + (28Q^3 + 26R^2 + 16QS)z^3 \\ + (17Q^4 + 48R^2Q - 112S^2 + 24Q^2S)z^2 + (4Q^5 + 18Q^3R \\ + 32Q^3S - 192QS^2 + 216R^2S)z + 256S^3 - 128Q^2S^2 \\ + 144R^2QS + 16Q^4S - 4R^2Q^3 - 27R^4 = 0.$$

176. Si proponatur æquatio quinque dimensionum
 $x^5 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$, erit æquatio quadratorum
 differentiarum radicum,

$$\begin{aligned} & z^{10} + 10qz^9 + (39q^2 + 10s)z^8 + (80q^3 + 50qs + 25r^2)z^7 \\ & + (95q^4 + 124q^2s - 95s^2 + 92qr^2 + 200rt)z^6 + (66q^5 \\ & - 360qs^2 + 196q^3s + 118q^2r^2 + 260r^2s + 625t^2 + 400qrt)z^5 \\ & + (25q^6 + 40s^3 - 53r^4 + 52q^3r^2 - 522q^2s^2 + 194q^4s + \\ & 708qr^2s + 240q^2rt + 1750qt^2 - 950srt)z^4 + (4q^7 + 106q^5s \\ & - 80qs^3 - 308q^3s^2 - 102qr^4 - 7q^4r^2 + 570r^2s^2 + 612q^2r^2s \\ & + 700r^3t - 3750t^2s + 2500t^2q^2 + 80q^3rt - 2150qrst)z^3 + \\ & (400s^4 - 360q^2s^3 - 15q^4s^2 + 24q^6s - 8q^5r^2 - 45q^2r^4 - \\ & 270r^4s + 140q^3r^2s + 960qr^2s^2 + 1875r^2t^2 + 1000rts^2 - \\ & 5000qst^2 + 1750q^3t^2 + 40q^4rt + 600qtr^3 - 1650q^2rst)z^2 + \\ & (36q^5s^2 - 224q^3s^3 + 320qs^4 + 4q^3r^4 + 27r^6 - 40r^2s^3 + \\ & 434q^2r^2s^2 - 24q^4r^2s - 198qr^4s + 5000s^2t^2 - 450r^3st - \\ & 6250rt^3 + 675q^4t^2 - 3750q^2st^2 + 3000qr^2t^2 + 60q^2r^3t + \\ & 200qrts^2 - 330q^3rst)z + 3125t^4 - 3750qrt^3 + 2000qr^2s^2 + 2250r^2s \\ & - 900sq^3 + 825q^2r^2 + 108q^5 \times t^2 - 1600rs^3 - 560q^3rs^2 - 16q^3r^3 + \\ & 630qrs^3 + 72q^4rs - 108r^5 \times t + 256s^3 - 128q^2s^2 + 144qr^2s + 16q^4s \\ & - 4q^3r^2 - 27r^4 \times s^2 = 0. \end{aligned}$$

177. Et sic universaliter: proposita æquatione $x^n - Px^{n-1}$
 $+ Qx^{n-2} - \&c. = 0$, æquationis resultantis $z^{\frac{n-1}{2}}$
 $- P'z^{\frac{n \cdot n-1}{2} - 1} + Q'z^{\frac{n \cdot n-1}{2} - 2} - \&c. = 0$, erunt
 coefficientes

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \overline{n-1} (a^2 + b^2 + c^2 + 8c.) = (n-1) \overline{P^1 - 2Q} \\ - 2(ab + ac + ad + 8c.) = - 2Q \end{array} \right\} = \overline{n-1} P^1 - 2nQ.$$

$$Q = \left\{ \begin{array}{l} \overline{n-1, \frac{n-2}{2}} (a^4 + b^4 + c^4 + 8c.) = \overline{n-1, \frac{n-2}{2}} (P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2Q^2 - 4S) \\ - 2 \cdot \overline{n-2} (a^3 \times b + c + d + 8c.) + b^3 \times \overline{a + c + d + 8c.} + 8c.) = - 2 \cdot \overline{n-2} (P^3Q - PR - 2Q^2 + 4S) \\ + n \cdot \overline{n-3} (a^2 \times bc + bd + cd + 8c.) + b^2 \times \overline{ac + ad + 8c.} + 8c.) = - 2 \cdot \overline{n-3} (PR - 4S) \\ + n \cdot \overline{n-2} (a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + 8c.) = \overline{n \cdot n-2} (- 2PR + Q^2 + 2S) \\ + 12 (abcd + abce + 8c.) = 12S. \end{array} \right.$$

$$= \overline{n-1, \frac{n-2}{2}} P^1 - 2n \cdot \overline{n-2} P^2Q - 2 \cdot \overline{n-3} PR + \overline{2n + 3 \cdot n-2} Q^2 + 2nS.$$

Et sic deinceps.

178. 1. *Hac operatione radices impossibiles, siquæ sunt, earumque numerum semper detegere possumus.*

Nam si omnes datæ æquationis radices sint reales, necesse est ut quadrata differentiarum radicum sint omnia affirmativa, adeoque æquationis resultantis termini vicibus alternis affirmativi & negativi. Quòd si data æquatio radices impossibiles fortiatur, cum differentia duarum correspondentium radicum impossibilium $a + b\sqrt{-1}$ & $a - b\sqrt{-1}$, vel $+b\sqrt{-1}$ & $-b\sqrt{-1}$, sit $2b\sqrt{-1}$, erit hujus quadratum $-4b^2$, reale nempe & negativum; unde æquationi resultanti competit una saltem radix realis & negativa, et proinde una saltem successio signorum similium. Atque hinc numerus radicum impossibilium in data æquatione *duplum* radicum negativarum, seu successuum signorum similium in æquatione resultante nunquam transcendere potest.

179. Ut si proponatur æquatio cubica $x^3 + qx - r = 0$, ubi q affirmativum est, vel ubi q negativum est, & $4q^3$ simul minus quam $27r^2$, emerget in æquatione resultante § 174 successio similium signorum, adeoque æquationis datæ duæ erunt radices impossibiles, tertia autem realis & affirmativa erit si r sit negativum, et vice versâ, per § 146. Sic habitâ æquatione $x^3 - 2x + 4 = 0$, erit æquatio quadratorum differentiarum $z^3 - 12z^2 + 36z + 300 = 0$, adeoque ob successionem similium signorum, datæ æquationis duæ erunt radices impossibiles, tertiæ autem negativa. In cubicis igitur semper definietur numerus radicum impossibilium, utpote qui binarium transcendere nequit.

180. Si proponatur æquatio biquadratica $x^4 + qx^3 - rx + s = 0$, ubi in æquatione resultante prodit successio signorum similium, constat æquationem datam radices impossibiles fortiri. Cæterum *numerum* quoque radicum impossibilium, terminis rite collatis, eruere licet. Fingatur enim omnes datæ æquationis radices esse impossibiles, eritque æquationis resultantis ultimus terminus $256s^3 - 128q^2s^2 + \&c.$ affirmativus, cum ex sex radicibus ejus, binæ quæque correspondentes radices in se ductæ factum referent affirmativum, formæ B^2 vel $A^2 + B^2$, adeoque factum sub omnibus erit affirmativum. Et proinde si $256s^3 - 128q^2s^2 + \&c.$ emergat negativus, æquationis datæ quatuor radices impossibiles esse nequeunt.

Hinc æquationis biquadraticæ radices impossibiles, siquæ hac operatione detegantur, erunt vel quatuor, ubi æquationis resultantis terminus ultimus est affirmativus aut nihil; vel duæ tantum, ubi est negativus: & duæ quæ supersunt radices reales, contrariis afficientur signis, ubi ultimus datæ æquationis terminus est negativus, per § 147.

181. Similiter, æquationis quintæ dimensionis, quæ necessario unam habet radicem realem, erunt radices impossibiles quatuor, ubi æquationis resultantis terminus ultimus est affirmativus aut nihil; vel duæ tantum, ubi est negativus. Atque iisdem vestigiis insistendo, numerum radicum impossibilium æquationis cujuscunque eruere licet.

182. Operosa certe evadit hæc methodus eruendi radices impossibiles, præsertim in æquationibus dimensionum superiorum. At ubi faciliore uti non licet, difficile fastidire haud æquum est. Doctrinam radicum impossibilium si quis penitus excutere velit, auctorem supra laudatum,

at paulo quidem reconditiorem, *Waring*, consulat, quem in hac re, potissimum, ut interpretes secuti sumus. *Med. Algeb. Prob. 5* § 11. Consulat quoque *La Grange*, *Acad. Berlin*, an. 1767, 1768, & 1772.

183. 2. *Hac operatione quoque, ubi duæ æquationis radices sunt æquales, detegere possumus.*

Nam ubi ultimus æquationis resultantis terminus evanescit, necesse est ut una ex radicibus ejus evanescat, five ut quadratum differentiæ duarum radicum datæ æquationis evanescat, adeoque ut hæ duæ radices sint inter se æquales. Defectus igitur termini ultimi æquationis resultantis, indicio est æquationem datam duas radices inter se æquales fortiri.

184. Facilius autem ope Transmutationis II, casus detegere licet, ubi duæ, tres, pluresve datæ æquationis radices, sint inter se æquales. Nam ubi ultimus transformatæ terminus evanescit, erit una radix seu valor $y = 0$, adeoque datæ æquationis una radix seu valor $x = \pm c$, ob $x \mp c = y = 0$. Ubi duo postremi transformatæ termini evanescunt, erunt duæ radices seu valores $y = 0$, adeoque datæ æquationis duæ radices $x = \pm c$, adeoque æquales inter se. Similiter, ubi tres postremi termini defunt, erunt datæ æquationis tres radices æquales inter se. Et sic deinceps.

185. Hinc si datæ æquationis duæ sint radices inter se æquales, transformatæ coefficientis penultima, quæ in hoc casu fit nihil, substituendo x pro c , æquationem constituet dimensionis depressoioris cui radix erit c , una nempe radicum æqualium datæ æquationis. Si datæ æquationis tres radices sint inter se æquales, coefficientis transformatæ ante-

penultima æquationem præbebit dimensionis adhuc deprefioris, cui radix erit una ex tribus radicibus æqualibus datæ æquationis. Atque sic deinceps.

His traditis de radicum natura, atque præcipuis affectionibus & transmutationibus æquationum, pergamus jam resolutionem æquationum radices rationales habentium docere.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM RADICES RATIONALES HABENTIUM.

186. Quoniam æquationis cujuscunque $x^n . Px^{n-1} . Qx^{n-2} . \&c. U = 0$, terminos nec fractos nec furdos habentis omnes radices non surdæ sunt aliqui ex divisoribus *integræ* termini ultimi; per § 144, COR. VI. Substituendi sunt in æquatione pro x , omnes divisores ultimi termini tam simplices quam compositi figillatim, et si horum aliquis omnes æquationis terminos se mutuo destruere efficiet, radix æquationis erit. Quòd si divisorum nullus hanc conditionem impleverit, patet nullam esse æquationis radicem nisi quæ sit aut irrationalis aut impossibilis.

Invenientur autem omnes divisores ultimi termini, *si quantitas simplex est, eam dividendo per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis. Hi divisores una cum quoto indivisibili constituent omnes quantitatis divisores primos seu simplices; et rectangula aut contenta sub singulis binis, ternis, quaternis, &c. horum divisorum, omnes ejus divisores compositos.*

Sic in æquatione $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$, divisores termini ultimi prodeunt 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10; scriptis autem successive

$$\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pro } x, \text{ prodi} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 - 4 - 7 + 10 = 0, \text{ adeoq. } +1 \text{ erit radix} \\ -1 - 4 + 7 + 10 = 12, \\ 8 - 16 - 14 + 10 = -12, \\ -8 - 16 + 14 + 10 = 0, \text{ adeoq. } -2 \text{ erit radix} \\ 125 - 100 - 35 + 10 = 0, \text{ adeoq. } +5 \text{ erit radix} \end{array} \right. \end{array}$$

&c. &c.

187. Inventis hac methodo omnibus radicibus æquationis *præter unam*, hæc facilius erui potest, dividendo terminum ultimum sub signo mutato, per contentum radicum jam inventarum. Sic in hac æquatione, dividendo -10 per $+1 \times -2 = -2$, quotus $+5$ erit tertia radix.

Inventis omnibus radicibus *præter duas*, hæc erui possunt five sint reales five impossibiles, deprimendo æquationem datam ad quadraticam, ope factorum simplicium vel compositorum ex radicibus jam inventis resultantium, & hujus reductio dabit duas quæ supersunt radices. Sic inventâ $+1$ radice æquationis cubicæ $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$, dividendo per $x - 1 = 0$ resultabit quadratica $x^2 - 3x - 10 = 0$, cujus radices sunt $+5$ vel -2 . Inventis item $+2$ & $+4$ radicibus biquadraticæ $x^4 - 4x^3 - 8x + 32 = 0$, dividendo per $x - 2 = 0$, et rursus quotum per $x - 4 = 0$; vel simul dividendo per $(x - 2)(x - 4) = 0$, emerget æquatio quadratica $x^2 + 2x + 4 = 0$, cujus radices sunt $-1 + \sqrt{-3}$ & $-1 - \sqrt{-3}$. Habentur itaque quatuor radices quæsitæ.

188. *Idem brevius absolvere licet tollendo secundum terminum.*

Sic in æquatione novissimâ scribendo $y + 1$ pro x , prodit $y^4 - 6y^2 - 16y + 21 = 0$, & tentando divisores termini ultimi 21, duæ prodeunt radices rationales $+1$ & $+3$, quarum summa est 4, adeoque ob defectum secundi termini, summa reliquarum erit -4 . Designet v unam ex his, alteram designabit $-4 - v$, eritque harum factum $-4v - v^2 = \frac{21}{3} = 7$, adeoque $v^2 + 4v = -7$, & $v = -2 + \sqrt{-3}$ & altera $-4 - v = -2 - \sqrt{-3}$. Prodeunt igitur quatuor radices æquationis novæ $+1$, $+3$, $-2 + \sqrt{-3}$, $-2 - \sqrt{-3}$, quæ unitate auctæ dabunt radices æquationis datæ.

189. Cæterum ubi divisores ultimi termini sunt permulti, ut in æquatione $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, cujus ultimi termini divisores 32 sunt, nempe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, -1 , -2 , &c. hosce omnes tentare tædio foret. Laboris igitur minuendi gratiâ, primus excogitavit *De Beaune* methodum inveniendi limites inter quos consistunt radices, quam postea perfecit *Newtonus*. Jam enim non opus erit divisores tentare nisi qui sunt inter hos limites.

DE LIMITIBUS ÆQUATIONUM.

190. I. Radicum affirmativarum limites invenire.

Minuantur radices æquationis datæ terminis progressionis 1, 2, 3, &c. successive, donec omnes novæ æquationis termini evadant affirmativi, erunt omnes radices hujus negativæ, adeoque & radices datæ æquationis sic diminutæ; quarum idcirco decrementum in hoc casu omnem radicem affirmativam transcendet, § 158, five erit limes.

Ut si proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, evadent coefficientes æquationes novæ, per Reg. § 157.

	Si x fit	1	2	3 &c.
$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$		- 38	+ 46	
$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$	-	+ 90	+ 79	
$10x^3 - 12x^2 - 30x + 30$	- - -	- 2	+ 2	
$10x^2 - 8x - 10$	- - -	- 8	+ 14	
$5x - 2$	- - -	+ 3	+ 8	
1	- - -	+ 1	+ 1	

Quoniam igitur substituendo 1 pro x coefficientes aliquæ prodeunt negativæ, nimirum ultima = - 38, quarta = - 2, tertia = - 8, limes erit major quam 1; at substituendo 2 pro x , prodeunt omnes affirmativæ, unde erit 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Et hic ob-

servandum est, quod si coefficientis aliqua evaserit negativa reliquarum valores invenire non necesse erit. Sic in hoc exemplo, si scribatur 1 pro x , prodit tertia coefficientis $10x^2 - 8x - 10 = -8$ negativa, adeoque operationem ulterius prosequi non necesse erit. Sæpe quidem sufficiet si feligamus coefficientem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur, reliquis omiffis.

191. Atque ideo, si termini duo pluresve primi æquationis propositæ sint affirmativi, non necesse erit omnes coefficientes novæ æquationis eruere; fisti potest operatio, ubi ad coefficientem aliquam pervenitur cujus termini omnes sunt affirmativi præter ultimum. Sic habitâ æquatione $x^7 + 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 13x - 15 = 0$, coefficientes novæ æquationis evadent

$$\begin{array}{r} x^7 + 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 13x - 15 \\ 7x^6 + 18x^5 + 25x^4 - 28x^3 + 27x^2 - 22x + 13 \\ 21x^5 + 45x^4 + 50x^3 - 42x^2 + 27x - 11 \\ 35x^4 + 60x^3 + 50x^2 - 28x + 9 \\ 35x^3 + 45x^2 + 25x - 7 \\ \&c. \qquad \&c. \end{array}$$

Inventis autem his quinque coefficientibus ultimis æquationis novæ, operationem ultra continuare non opus, cum coefficientis proxime insequentis $21x^2 + 18x + 5$, necnon reliquarum deinceps, termini omnes sunt affirmativi.

192. II. *Radicum negativarum limites invenire.*

Augeantur radices datæ æquationis, &c. donec termini alterni tantum evadant negativi, erunt omnes radices datæ

æquationis sic aucta, affirmativæ; quarum idcirco augmentum, &c. erit radicum negativarum limes.

Vel quod perinde est, mutantur signa terminorum alternorum, & inveniatur per *præced.* limes radicum affirmativarum æquationis resultantis, hic enim mutato signo limes erit radicum negativarum datæ æquationis.

Sic mutatis signis terminorum alternorum, coefficientes æquationis propositæ evadent

$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120$$

$$5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63$$

$$10x^3 + 12x^2 - 30x - 30$$

$$10x^2 + 8x - 10$$

&c.

Ex his seligo coefficientem aliquam ubi termini negativi maxime prævalere videntur, puta $5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63$, & hic substituendo pro x numeros 1, & 2, prodeunt numeri negativi -14 & -33 respective. Unde limes erit major quam -2 . Substituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et similiter in cæteris coefficientibus substituendo numerum 3 pro x prodit semper numerus affirmativus. Id quod ex inspectione sola colligere licet. Quare numerus -3 transcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3 inter quos radices omnes æquationis propositæ consistunt. Jam enim non opus erit divisores termini ultimi 120 tentare, nisi qui sunt inter hos limites, nimirum divisores 1, -1 , & -2 . Sed horum nullus radix est, unde certum est æquationem non habere radicem nisi quæ sit furda.

193. Hæc limitum inventio ufui erit in reductione æquationum quarum radices inter angustos limites concludantur, seu sint parum inæquales inter fe. Quod si radicem una ad maximum termini ultimi divisorem accedat, altera ad minimum, factores complures ultimi termini inter ipsos limites consistere possunt; quo in casu, parum subsidii ad laborem operationis minuendum conferet hæc methodus.

Aliam methodum feligendi divisores ultimi termini ad æquationem dividendam idoneos, *Newtonianâ* in praxi sæpe commodiorem adjungere libet. Hujus inventorem fuisse *Waeffænaer* refert *Schooten, Com. in Geom. Cartes, lib. 3. p. 307. Edit. 1659.*

194. Minuantur radices æquationis propositæ numero quodam dato, puta unitate (unitatem, vel denarium ad id assumere commodissimum erit) & radices æquationis novæ unitate minores evadent radicibus datæ. Dein augeantur unitate divisores ultimi termini novæ æquationis, & si horum aliqui sic aucti inter divisores termini ultimi datæ æquationis reperiantur, talium præ cæteris ratio habenda est. Et rursus, augeantur unitate radices, &c. Dein minuantur unitate divisores, &c. Secunda hæc operatio plures adhuc divisores superfluos rescabit; & aliquando omnes tollet, ubi nimirum radices nullæ sint rationales.

Sic in æquatione $x^3 - x^2 - 30x + 72 = 0$, substituendo $+ 1$ pro x , fiet ultimus terminus novæ æquationis $+ 42$, ejusque divisores nempe 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, $- 1$, $- 2$, &c. unitate aucti evadent 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, 0, $- 1$, $- 2$, $- 5$, $- 6$, &c. Quibus collatis cum divisoribus ultimi termini æquationis datæ 72, nempe

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, — 1, — 2, &c. utrinque deprehenduntur 2, 3, 4, 8, — 1, — 2, — 6. Et rursus, substituendo — 1 pro x , fiet ultimus terminus novæ æquationis + 100, ejusque divisores nempe, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, — 1, — 2, — 4, &c. unitate diminuti evadent, 1, 3', 4', 9, &c. — 2', — 3, — 5, — 6', &c. quorum + 3, + 4, — 2, — 6, cum radicibus per præcedentem operationem reservatis consentiunt: ergo ultimi termini divisores simplices tentandi, sunt + 3, + 4, — 2 & — 6, vel æquationis divisores compositi $x - 3$, $x - 4$, &c. unde prodeunt radices + 3, + 4, & — 6.

Sic quoque in æquatione præcedente $x^5 - 2x^4$ &c. — 120 = 0 substituendo + 1 pro x , fit ultimus terminus novæ æquationis — 38, ejusque divisores, 1, 2, 19, 38, — 1, — 2, &c. unitate aucti evadent 2, 3, 20, 39, — 1, — 18, — 37, quorum 2, 3, 20, — 1 tantum inter divisores ultimi termini 120 reperiuntur. Et rursus, substituendo — 1 pro x , prodit, &c. — 146, ejusque divisores 1, 2, 73, 146, — 1, — 2, &c. unitate diminuti evadunt 1, 72, 145, — 2, — 3, &c. omnes nimirum a divisoribus per præcedentem operationem reservatis diversi: unde colligitur æquationem nullam fortiri radicem nisi quæ sit furda.

Divisores ultimi termini datæ æquationis per hanc regulam *rejectos*, inter radices datæ æquationis censerì non posse ex eo constat, quod si fingantur radices esse datæ æquationis, unitate auctæ vel diminutæ deberent esse ex

divisoribus ultimi termini novæ æquationis, contra hypothesin. Ex divisoribus quoque *reservatis*, raro omnes munere radicum fungentur, verum divisores hujusmodi inutiles, ex operatione iteratâ minuendi radices, &c. deprehendi possint.

DE INVENTIONE DIVISORUM COMPOSITORUM
ÆQUATIONIS.

195. Ex hac *Waeffanaeri* methodo feligendi divisores ultimi termini æquationis datæ quorum præ cæteris ratio habenda est, deduxisse videtur *Newtonus* Regulam præclaram pro *inventione divisorum compositorum unius dimensionis*. Quam sic investigare licet.

Finge $ax + b$ divisorem esse æquationis $px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} \&c. + u = 0$, ubi $a, b, p, q, \&c.$ designant numeros integros. Necessè est divisoris partem priorem ax , atque idcirco coefficientem ejus a , esse divisorem numeralem altissimi termini px^n ; itemque partem posteriorem b esse divisorem ultimi termini u : nam si non, $ax + b$ totius æquationis non foret divisor. Substitue jam pro x figillatim tres vel plures terminos progressionis arithmeticæ decrefcentis 3, 2, 1, 0, - 1, &c. et erunt valores resultantes

x	$px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} \&c. + u$	$ax + b$
2	$2^n p + 2^{n-1} q + 2^{n-2} r \&c. + u$	$2a + b$
1	$p + q + r \&c. + u$	$a + b$
0	$* \quad * \quad * \quad + u$	$* + b$
-1	$+p \quad +q \quad +r \&c. + u$	$-a + b$
$\&c.$	$\&c.$	$\&c.$

ubi observandum est, quod divisoris valores resultantes $2a + b$, $a + b$, $+b$, $\&c.$ constituent alteram progressionem arithmeticam communi differentia a decrescens, cujus terminus quisque erit divisor valoris correspondentis ex substitutione ejusdem numeri pro x in æquatione datâ resultantis; adeoque terminus b e regione zero, divisor erit valoris correspondentis u , affirmativè ponendus si descendat series divisorum, negativè si ascendat, utpote in progressionem decrescens constitutus. Hinc élicitur regula insequens.

196. In æquatione propositâ pro x substitue sigillatim tres vel plures terminos progressionis arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, -1 , $\&c.$ ac valores totidem resultantes una cum omnibus suis divisoribus tam affirmativis quam negativis, statue e regione correspondentium terminorum progressionis. Dein e regione etiam statue progressionem arithmeticam decrescens quæ per omnium numerorum divisores percurrunt, & quarum termini differunt vel unitate, vel numero aliquo qui dividit altissimum terminum propositæ æquationis. Si qua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus qui stat e regione zero in progressionem primam, cum signo suo annexus quantitati incognitæ x in communem differentiam terminorum ductæ, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.

Ut si æquatio fit $x^3 - x^2 - 10x + 6 = 0$, pro x substituendo figillatim terminos progressionis 1, 0, -1, orientur numeri -4, +6, +14, quos cum omnibus eorum divisoribus colloca è regione terminorum progressionis, hoc modo.

	Divisores	Progr. ar.		Divisores	Progr. ar.
$x = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\}$	$x^3 - x^2 - 10x + 6 =$		$\left\{ \begin{matrix} -4 \\ +6 \\ +14 \end{matrix} \right\}$	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot$	$+4$
				$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$	$+3$
				$1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 14$	$+2$

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est, quære in divisoribus progressionem decrescentem cujus termini differunt unitate, & hujusmodi progressionis unice resultantis 4, 3, 2, felige terminum +3, qui stat e regione zero in progressionem primam, & divisionem tenta per $x + 3$, unde prodibit $x^2 - 4x + 2 = 0$ cujus radices sunt $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$. Adeoque tres radices sunt -3, $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$.

Et rursus si æquatio fit $25x^4 + 110x^3 - 161x^2 - 190x + 144 = 0$, § 94, erit

$x = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\}$	$25x^4 + 110x^3 \&c.$	-272	$\left\{ \begin{matrix} 1, 2, 4, 8, 16, \&c. \\ 1, 2, 3, 4, 6, \&c. \\ 1, 2, 3, 4, 6, \&c. \end{matrix} \right\}$	$+4 + 8\&c. - 1\&c.$
		$+144$		$+3 + 3\&c. - 2\&c.$
		$+288$		$+2 - 2\&c. - 3\&c.$
$\&c.$		$\&c.$	$\&c.$	$\&c.$

Ex his progressionibus tres feliguntur divisores tentandi, nempe $x + 3$, $5x + 3$, & $x - 2$, quorum ultimus solus succedit, et quotientem dat $25x^3 + 160x^2 + 159x - 72 = 0$.

Atque ita si æquatio sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30 = 0$, operatio erit ut sequitur.

$$a = \begin{Bmatrix} +2 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} 24a^5 - 50a^4 \&c. = \begin{Bmatrix} 42 \\ 23 \\ 30 \\ 297 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1, 2, 3, 6, 7, \&c. \\ 1, 23, \\ 1, 2, 3, 5, 6, \&c. \\ 1, 3, 9, 11, 27, \&c. \end{matrix} \begin{Bmatrix} +3 + 3 + 7 \\ +1 - 1 + 1 \\ -1 - 5 - 5 \\ -3 - 9 - 11 \end{Bmatrix}$$

Tres occurrunt hic progressionem quæ tres dant divisores tentandos $2a - 1$, $4a - 5$, & $6a - 5$, quorum ultimus solus succedit, prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4a^2 - 20a - 6 = 0$.

Atque hic observandum, quod progressionem 2, 1, 0, -1, &c. continuando, facilius deteguntur divisores inutiles. Sic in exemplo novissimo, si quintus accedat terminus progressionis substituendo -2 pro a , prodit -2618, cujus ex divisoribus 1, 2, 7, 11, 17, &c. -17 ultimam progressionem 7, 1, -5, -11, continuabit, cæteris interruptis.

198. Si nullus occurrit hac methodo divisor, vel nullus qui dividit propositam æquationem, concludendum erit æquationem illam non admittere divisorem *unius* dimensionis. Potest tamen fortasse, si plurium sit quam trium dimensionum, divisorem admittere *duarum*. Et si ita, divisor ille eruetur ope methodi insequentis, quam sic investigare licet.

Finge $ax^3 + bx + c$ divisorem esse æquationis $px^n + qx^{n-1} \&c. + u = 0$. Necessè est ut a fit divisor numeralis termini altissimi px^n , aliter enim totam æquatio-

nem non divideret. Substitue jam figillatim pro x quatuor vel plures terminos progressionis arithmeticae 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, et erunt valores resultantes

x	$px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \&c. + u$	$ax^2 + bx + c$
3	$3^n p + 3^{n-1} q + 3^{n-2} r + \&c. + u$	$9a + 3b + c$
2	$2^n p + 2^{n-1} q + 2^{n-2} r + \&c. + u$	$4a + 2b + c$
1	$p + q + r + \&c. + u$	$a + b + c$
0	$* * * \&c. + u$	$* * + c$
— 1	$\mp p \pm q \mp r \pm \&c. + u$	$a - b + c$
— 2	$\mp 2^n p \pm 2^{n-1} q \mp 2^{n-2} r \pm \&c. + u$	$4a - 2b + c$

Ubi observandum est, quod si de valoribus successivis divisoris generalis subducantur primi horum termini $9a$, $4a$, a , $\&c.$ respective, residua $3b + c$, $2b + c$, $b + c$, $\&c.$ constituent alteram progressionem arithmeticam cujus differentia communis est b , & cujus terminus c e regione zero in progressionem prima erit ex divisoribus termini correspondentis u . Unde elicitur regula insequens.

198. In æquatione proposita substitue pro x , quatuor vel plures terminos progressionis hujus 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, & de divisoribus omnibus numerorum resultantium tam affirmativis quam negativis, subduc quadrata correspondentium terminorum progressionis illius, in divisorem aliquem numeralem termini altissimi æquationis ducta; & residua propriis cum signis e regione progressionis colloca. Dein progressionem omnes collaterales tam crescentes quam decrescientes nota quæ per ista residua percurrunt. Et

erit divisor ille duarum dimensionum tentandus, cujus primi termini coefficientis est prædictus divisor numeralis termini altissimi; secundi coefficientis, differentia communis progressionis illius collateralis cum signo affirmativo si decrescat progressio, negativo si crescat; & tertius terminus, iste progressionis collateralis terminus qui stat regione zero in progressionem primam.

Invenietur autem differentia communis, subducendo terminum istiusmodi progressionis e regione zero in progressionem primam, de termino ejusdem progressionis proxime superiore, eritque differentia affirmativa aut negativa prout progressio decrescat vel crescat.

Ut si æquatio proposita sit $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, substituendo pro x , successive 3, 2, 1, 0, -1, -2, numeros prodeuntes 39, 6, 1, -6, -21, -26, una cum eorum divisoribus tam affirmativis quam negativis sic dispone

3	39	1, 3, 13, 39, -1, -3, &c.	-8, -6, 4, 30, -10, -12, &c.	+4	-6
2	6	1, 2, 3, 6, -1, -2, &c.	-3, -2, -1, 2, -5, -6, &c.	+2	-3
1	1	1, -1,	0, -2,	+0	+0
0	-6	1, 2, 3, 6, -1, -2, &c.	1, 2, 3, 6, -1, -3, &c.	-2	+3
-1	-21	1, 3, 7, 21, -1, -3, &c.	0, 2, 6, 20, -2, -4, &c.	-4	+6
-2	-26	1, 2, 13, 26, -1, -2, &c.	-3, -2, 9, 22, -5, -6, &c.	-6	+9

Dein de his divisoribus figillatim subduc quadrata terminorum progressionis primæ ducta in divisorem numeralem termini x^4 , qui unitas est, viz. terminos 9, 4, 1, 0, 1, 4, & prodibunt termini -8, -6, &c. -3, -2, &c. e latere pariter dispositi; qui duas præbent progressionem arithmeticas +4 +2, +0, &c. et -6, -3, +0, &c.

collaterales. Unde prodeunt divisores tentandi $x^3 + 2x - 2$ & $x^3 - 3x + 3$, per quorum utrumque res succedit. At factoris $x^3 + 2x - 2 = 0$ radices sunt $-1 \pm \sqrt{-3}$, irrationales, et factoris $x^3 - 3x + 3 = 0$ radices $\frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$ sunt impossibiles. Hæc regula igitur aliquando utilis erit in radicibus æquationum furdis & impossibilibus eruendis.

199. Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est æquationem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Hinc quoque concludere licet, æquationem non admittere divisorem trium dimensionum, si modo quintum non transcendat gradum. Sin æquatio ad sextum gradum aut ultra assurgat, potest forsan nullum admittere divisorem nisi qui sit trium pluriumve dimensionum. Posset quidem eadem methodus extendi ad inventionem hujusmodi divisorum quærendo in prædictis residuis, progressionem non arithmeticas, sed alias quasdam quarum terminorum differentia primæ, secundæ, tertiæ, &c. sunt in arithmetica progressionem: at in his tyro non est detinendus. Siquis tamen hæc desiderat, adeat *M^e Laurin, Algeb. Part. II. § 70.*

DE INVENTIONE. DIVISORUM ÆQUATIONUM LITERALIUM QUARUM TERMINI SUNT HOMOGENEI.

200. Proponatur æquatio $x^n - ax^{n-1} - 5a^2x^{n-2} + 12a^3x^{n-3}$ &c. $- 6a^n = 0$. Et si dividantur radices

hujus per a , substituendo ay pro x emerget $y^n - y^{n-1} - 5y^{n-2} + 12y^{n-3}$ &c. $- 6 = 0$. Deinde per regulas præcedentes quære hujus divisorem, & restituendo in divi-
fore prodeunte $\frac{x}{a}$ pro y , & tollendo fractiones, habebitur
data æquationis divisor. Hinc elicitur regula insequens.

201. Ubi in æquatione proposita duæ sunt literæ, & omnes
ejus termini ad dimensiones æque altas ascendunt; pro una ista-
rum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære
divisorem, ac divisoris hujus comple deficientes dimensiones restitu-
endo literam illam pro unitate.

Ut si æquatio sit $6x^4 - ax^3 - 21a^2x^2 + 3a^3x + 20a^4 = 0$
ponendo 1 pro a , evadit $6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20 = 0$,
cujus eruetur divisor $3x + 4$, & completa deficiente di-
mensione posterioris termini per dimensionem a , fit $3x + 4a$
divisor quæsitus. Ita si æquatio sit $x^4 - bx^3 - 5b^2x^2$
 $+ 12b^3x - 6b^4 = 0$ posito 1 pro b , & æquationis resul-
tantis $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$ invento divi-
fore $x^2 + 2x - 2$, completis ejus deficientibus dimensionibus
per dimensiones b , habebitur divisor quæsitus $x^2 + 2bx$
 $- 2b^2$.

Possent eadem methodus extendi ad inventionem diviso-
rum ubi in æquatione proposita tres vel plures sunt literæ,
idque sive termini sint æquialti sive non; cæterum hisce
non est immorandum. Consulat lector horum studiosus
Clairaut, Algeb. 4ta edit. 1768, p. 184, &c.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM DUAS PLURESVE RADICES INTER SE ÆQUALES HABENTIUM.

202. Ubi ex § 183, vel aliunde compertum est æquationem binas pluresve radices æquales fortiri, conferendo hanc cum æquatione dimensionis inferioris inde eliciendâ, per § 185, facile inveniri potest valor unius radicum æqualium.

203. Ut si proponatur æquatio cubica $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, duas habens radices inter se æquales, inde elicitur per § 185, æquatio quadratica $3x^2 - 2px + q = 0$, radicem habens unam radicum æqualium. Collatis autem hisce æquationibus inter se, per REG. § 70, resultabit quadratica $px^2 - 2qx + 3r = 0$, et quadraticis iterum collatis, resultabit simplex æq. $(2p^2 - 6q)x - pq + 9r = 0$, unde prodit $x = \frac{pq - 9r}{2p^2 - 6q}$.

Hunc valorem x unam radicum æqualium exponere, per compositionem æquationum constabit. Sint enim radices a, a, b , erit $p = 2a + b$, $q = a^2 + 2ab$, & $r = a^2b$. Adeoque his substitutis, prodit $x = \frac{pq - 9r}{2p^2 - 6q} = \frac{2a^3 - 4a^2b + 2ab^2}{2a^2 - 4ab + 2b^2} = a^*$. Sic habitâ æquatione $x^3 + 5x^2 - 32x + 36 = 0$,

* Vide *Differt. D. Hellins, Phil. Trans. an. 1782, p. 417.*

fiat $p = -5$, $q = -32$, $r = -36$, erit $x = \frac{160 + 324}{50 + 192}$

$= \frac{284}{242} = 2$. Adeoque dividendo æquationem datam per

$(x - 2)^2$ eruetur quotiens $x + 9 = 0$. Ergo tertia radix erit -9 . Habitâ quoque æquatione $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$,

erit $x = \frac{-9r}{-6q} = \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{192}{2}} = -\frac{1}{2}$. Adeoque tertia radix $+1$.

204. Si proponatur æquatio biquadratica $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, duas habens radices reales, harum una erit radix æquationis cubicæ $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$. Et collatis his æquationibus, emerget cubica $px^3 - 2qx^2 + 3rx - 4s = 0$. Et collatis cubicis, emerget quadratica $(3p^2 - 8q)x^2 + (12r - 2pq)x + pr - 16s = 0$, seu abbreviandi gratiâ, $Ax^2 + Bx + C = 0$. Et collatis iterum cubicis, per REG. § 73, emerget altera quadratica $(pr - 16s)x^2 + (12ps - 2qr)x + 3r^2 - 8qs = 0$, seu $Cx^2 + Dx + E = 0$. Dein collatis quadraticis, emerget $(AD - BC)x + AE - C^2 = 0$, adeoque $x = \frac{C^2 - AE}{AD - BC}$.

Restitutis autem valoribus A, B, C, &c. prodit

$$x = \frac{6p^2qs - 2p^2r^2 - 8prs + 6qr^2 - 16q^2s + 64s^2}{9p^3s - p^3qr - 3pr^2 - 32pqs + 4q^2r + 48rs}. \text{ Deleto}$$

autem termino secundo æquationis, erit $x = \frac{6qr^2 - 16q^2s + 64s^2}{4q^2r + 48rs}$

$$= \frac{(3r^2 - 8qs)q + 32s^2}{(q^2 + 12s)2r}.$$

Sic habita æquatione $x^4 - 11x^2 + 18x - 8 = 0$, statuendo $q = -11$, $r = -18$, $s = -8$, prodit

$$x = \frac{-(972 - 704)11 + 2048}{-(121 - 96)36} = \frac{-900}{-900} = +1. \text{ Et divi-}$$

dendo æquationem per $(x - 1)^2$ prodit quotiens $x^2 + 2x - 8 = 0$, cujus reductio dabit reliquas radices $+2$ & -4 .

Si tres biquadraticæ radices sint inter se æquales, harum duæ erunt radices æquationis cubicæ $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$, et una, quadraticæ $6x^2 - 3px + q = 0$. Et

his collatis, eruetur $x = \frac{pq - 6r}{3p^2 - 8q}$. Ut si æquatio fit

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0, \text{ erit } x = \frac{-3 + 30}{3 + 24} = +1,$$

adeoque dividendo per $(x - 1)^3$ eruetur quotiens $x + 2 = 0$, adeoque quarta radix erit -2 .

Hisdem vestigiis insistendo valores radicum æqualium, & inde reliquarum, in æquationibus dimensionum superiorum eruere licet.

205. Hactenus reductionem æquationum tradidimus quæ rationales divisores admittant. Deficientibus autem hujusmodi divisoribus, aliquando reduci potest æquatio quatuor, sex aut plurium dimensionum, per furdum aliquem divisorem. Methodum quidem tales divisores inveniendi tradit *Newtonus*, quærendo nimirum quantitatem aliquam complexam quæ quadratum utriusque partis æquationis propositæ compleat, quâ additâ, per extractionem

furdæ radices quadraticæ utrobique res succedit. Has autem reductiones prætereo, quarum utpote raro possibile, perexiguus sit usus, ipso fatente *Newtono*, “ qui rei possibilitatem potius quam praxim commodissimam voluerit exponere.” De his consulendus est *M^e Laurin*, &c. et præcipue *Simpson*, *Mathematical Tracts*.

Hanc analyfeos partem haud minore studio excoluisse videtur *Leibnitz*, *Newtoni* æmulus, licet meditationes ejus in lucem non prodierunt. In epistolis suis ad *Oldenburg*, an. 1676, ita scribit.

“ De æquationum radicibus furdis generalibus inveniendis, five quod idem est, tollendis æquationum potestatibus intermediis, multa & ego meditatatus sum; & jam vere anni superioris specimina *Hugenio* communicaveram regularum *Cardanicis* similium. Seriem enim habebam ejusmodi regularum in infinitum euntem, in quibus & *Cardanica* continebatur. Sed ultra gradum cubicum non erant generales. Perspexi tamen inde methodum veram progrediendi longius.—Sed si quis laborem non subterfugeret, eum docere possum methodum analyticam generalem infallibilem, per quam omnium æquationum radices generales invenire liceret.” Vide *Commerc. Epistol.* N^o 53.

Merito tamen dubitare licet, annon promissa tam ingentia celeberrimi scriptoris fiduciam fefellissent, si modo calculis suis ultimum manum imponere voluerit. Multa enim ineunte calculo facilia fore fidimus, quæ temere assumpta & prorsus impossibilia arguet matura investigatio.

Pergamus jam æquationum cubicarum & biquadraticarum resolutiones generaliores docere.

DE RADICIBUS ÆQUATIONUM CUBICARUM.

206. Quo melius instituaturs disquisitio de radicibus cubicarum natura, commodum erit æquationem quamcunque cubicam, delendo terminum secundum, ad formam simpliciore reducere $x^3 + qx = r$; ubi variantibus signis q & r , quatuor distinguuntur casus, quorum tres priores tantum (ut in quadraticis) pro legitimis habuerunt analytæ vetustiores.

$$\text{I. } x^3 + qx = +r$$

$$\text{II. } x^3 - qx = +r$$

$$\text{III. } x^3 - qx = -r$$

$$\text{IV. } x^3 + qx = -r.$$

207. Designante p , primam radicem quoquo modo inveniendam, quæ semper realis erit, dividatur æquatio $x^3 + qx - r = 0$, per factorem simplicem $x - p = 0$, et (evanescente residuo $p^3 + pq - r$) emergit quotiens $x^2 + px + p^2 + q = 0$. Et extracta hujus radice quadratica, prodit $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-\frac{3}{4}p^2 - q}$. Æquationis itaque $x^3 + qx = r$, tres radices sunt p , $-\frac{1}{2}p + \sqrt{-\frac{3}{4}p^2 - q}$, vel $-\frac{1}{2}p - \sqrt{-\frac{3}{4}p^2 - q}$. Et sic universaliter: æquationis $x^3 + qx = r$, si una radix sit p , erunt reliquæ $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-\frac{3}{4}p^2 - q}$, ubi $\frac{1}{2}p$ & q cum signis mutatis, sed $\frac{3}{4}p^2$ semper negativè ponendum. Sunt igitur duæ

posteriores radices semper impossibiles ubi q in data æquatione affirmativum est, adeoque $\sqrt{-\frac{2}{3}p^2 - q}$ quantitas impossibilis; aut ubi q negativum est & simul minus quam $\frac{2}{3}p^2$, adeoque $\sqrt{-\frac{2}{3}p^2 + q}$ impossibilis: at ubi q negativum est ac simul æquale aut majus quam $\frac{2}{3}p^2$, sunt simul reales, aut evanescente, aut possibili jam factâ $\sqrt{-\frac{2}{3}p^2 + q}$.

Ibi itaque versabitur limes radicum realium & impossibilium ubi q in data æquatione negativum est & æquari primum incipit $\frac{2}{3}p^2$. In ipso autem limite, prodit $\frac{1}{3}q|^3 = \frac{1}{3}p^2|^3 = \frac{1}{27}p^6$. Itemque substituendo $\frac{2}{3}p^2$ pro q in æquationem $p^3 - pq = .r$, prodit $\frac{1}{3}p^3 = .r$, adeoque $\frac{1}{2}r|^3 = \frac{1}{8}p^3|^3 = \frac{1}{27}p^6$. Ergo, $\frac{1}{3}q|^3 = (\frac{1}{27}p^6 =) \frac{1}{2}r|^3$.

Ubi vero q in data æquatione negativum est ac simul minus quam $\frac{2}{3}p^2$, prodit $\frac{1}{3}q|^3$ minus quam $\frac{1}{27}p^6$ seu quam $\frac{1}{27}p^6$. Sed in hoc casu, $r (= p^3 - pq)$ fit majus quam $\frac{1}{27}p^3$, adeoque $\frac{1}{2}r|^3$ majus quam $\frac{1}{8}p^3|^3$ seu quam $\frac{1}{27}p^6$. Ergo, *a fortiori*, prodit $\frac{1}{3}q|^3$ minus quam $\frac{1}{2}r|^3$. Contra si q fit majus, &c.

208. Hinc partim ex signo quo afficitur q in data æquatione, partim ex magnitudine ejus respectu r , innotescit genesis radicum realium & impossibilium in æquatione $x^3 . qx = .r$. Nam ubi q affirmativum est, qualiscunque

fit ejus magnitudo, semper duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles; idem quoque fiet, ubi q negativum est

& $\frac{q^3}{27}$ simul minus quam $\frac{1}{4}r^2$. At ubi q negativum est &

$\frac{q^3}{27}$ simul æquale aut majus quam $\frac{1}{4}r^2$, sunt omnes radices

reales. Sicut aliunde collegimus, § 179, 183.

Hanc methodum deducendi affectiones radicum æquationum cubicarum termino secundo carentium immediate ex ipsa æquationum naturâ, suggessit dissertatio viri in hisce versatissimi, *Hutton, on Cubic Equations, & infinite Series* *.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM CUBICARUM.

209. Proponatur æquatio cubica cujus secundus terminus deest, $x^3 + qx = r$. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex præcedentibus. Finge x duas in partes dividi, quarum sit major y & minor z . Et substituendo $y + z$ pro x in hac æquatione, prodit $y^3 + z^3 + 3yz(y + z) + q(y + z) = r$. Finge iterum $3yz$ æquari q cum signo mutato, et terminis $3yz(y + z)$ atque $q(y + z)$ hoc pacto se destruentibus, manebit $y^3 + z^3 = r$, five, substituendo $\frac{-q^3}{27y^3}$ pro z^3 , * (ob $3yz$

* *Phil. Trans.* an. 1780, p. 387.

$= -q$, adeoque $z = \frac{-q}{3y}$ erit $y^3 - \frac{q^3}{27y^3} = r$, seu
 $y^6 = ry^3 + \frac{q^3}{27}$. Adeoque per reductionem, $y^3 = \frac{1}{2}r +$
 $\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$ & $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$. Itemque $z^3 =$
 $(r - y^3 = r - \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}})$ &
 $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$ *. Et sic universaliter: Si sit
 $x^3 \cdot qx = .r$, erit $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{r^2}{4} \cdot \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r -$
 $\sqrt{\frac{r^2}{4} \cdot \frac{q^3}{27}}}$. Ubi $\frac{1}{2}r$ & $\frac{q^3}{27}$ iisdem signis ac r & q in æquatione
 priore afficienda sunt, sed $\frac{1}{2}r^2$ semper affirmativè ponendum.

* Hæc formula appellatur *Cardani regula*, licet inventionem ejus *Scipioni Ferreo* Bononiensi tribuit ipse *Cardanus*. Discipulo suo *Antonio M. Florido* formulam tradidit *Ferreus*. At *Florido* cum in certamen venisset cum *Nicolao Tartalea* Brixellensi, occasionem dedit ut *Tartalea*, rem diu secum meditatus extuderit, cæterosque formulæ casus simul invenerit: et adversarii problematis 30 spatio duarum horarum (ut ipse scribit) resolutis, alia vicissim isti objecit ex cæteris casibus, quibus solvendis omnino impar erat. Formulam ipsam *Cardano* roganti, multis precibus exoratus impertivit *Tartalea*, suppressâ tamen demonstratione, eumque juramento adstrinxit, se hanc neutiquam vulgaturum nec nisi cifris commissurum. Verùm *Cardanus* promissorum immemor, hanc publici juris fecit in opere quodam *De Arte magna*, an. 1545. Unde ingens controversia exarsit, reclamante *Tartalea* fidem fregisse *Cardanum*, regerente *Cardano*, se regulam novis inventis auctam & demonstratione insuper munitam, quasi propriam jure edidisse, necnon scrupulum injiciente an *Tartalea* inventum sibi recte vindicaverit. Nec extinctæ sunt lites nisi cum ipso *Tartalea*, qui an. 1557 obiit.

Quanti hanc formulam fecit *Cardanus*, ex ipsius verbis constabit. " Tem-
 " poribus nostris *Scipio Ferreus* Bononiensis capitulum cubi & rerum numero
 " æqualium invenit. Rem sane pulchram & admirabilem, cum omnem huma-
 " nam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem ars hæc longe superet,

Inventâ primâ radice $x = y + z$, innotescant reliquæ. Quoniam enim unitati competit radix cubica triplex, nempe,

“ donum profecto cœleste, experimentum autem virtutis animorum, atque adeo “ illustre, ut qui hæc attigerit nihil non intelligere posse se credat.” *Cardan. Opera*, Tomi IV, p 222. *Cardanum* vero fefellit radices reales, in *Casu irreducibili*, sub specie impossibili adumbrari. Primus hoc exploratum habuit *Bombellius*.

Hujus regulæ historiam concludemus cum versibus Italicis quibus primi casus solutionem exposuit *Tartalea*.

*Quando che il-cubo con le cose appresso
S' agguaglia a qualche numero discreto,
Trovami due altri differenti in esso
Dapoi terrai questo per consueto
Ch' il lor producto sempre si eguale
Al terzo cubo delle cose netto ;
El residuo poi tuo generale
Delli lor lati cubi ben sottratto
Verra la tua cosa principale.*

Hocce versus sic interpretari licet.

Quando *cubus* cum *rebus* adjectis æquatur *numero*, i. e. $x^3 + qx = r$, inveniuntur duo alii numeri (y & z) quorum differentia sit r , & productum (yz)

æquale cubo tertiæ partis coefficientis rerum ($\frac{q^3}{27}$). Sed per primam conditionem, prodit $r + z = y$ & $y - r = z$, adeoque per secundam conditionem,

$y^3 - ry = \frac{q^3}{27}$, & per reductionem, $y = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} + \frac{1}{2}r$. Itemque, $rz + z^3$

$= \frac{q^3}{27}$, & per reductionem, $z = \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} - \frac{1}{2}r$. Deinde radicibus y & z cu-

1, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, vel $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, coefficiente triplici exponendæ sunt y & z , scilicet

$$1 y, \text{ vel } \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} y, \text{ vel } \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} y, \\ \& 1 z, \text{ vel } \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} z, \text{ vel } \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} z.$$

Ubi $\sqrt{-3}$ contrariis signis afficiendum in valoribus correspondentibus y & z , ut productum ex his in unoquoque casu sit $yz = \frac{-q}{3}$. Quod hoc pacto ita se habet, nam

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} y \times \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} z = \frac{1 + 3}{4} yz = yz.$$

Prodeunt igitur tres radices,

$$1. y + z,$$

$$2. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} y + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} z = \\ = \frac{-y - z}{2} + \frac{y - z}{2} \sqrt{-3} = -\frac{y + z}{2} + \frac{y - z}{2} \sqrt{-3}.$$

bice extractis, & subductâ majore radice cubicâ a minore, prodit *res* seu $x = \sqrt[3]{\frac{r}{4}}$

$$\sqrt[3]{\frac{r^3}{4} + \frac{q^3}{27}} + \frac{1}{2}r - \sqrt[3]{\frac{r^3}{4} + \frac{q^3}{27}} - \frac{1}{2}r, \text{ seu quod eodem redit, } = \sqrt[3]{\frac{r}{4}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{r^3}{4} + \frac{q^3}{27}} + \sqrt[3]{\frac{r}{4}} - \sqrt[3]{\frac{r^3}{4} + \frac{q^3}{27}}. \text{ Vide Montucla, } Hyst. de Mathem.$$

Vol. I, p. 480. Et *Differt. De Gua. Mem. de l'Acad. an. 1741.*

$$3. \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} y + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} z =$$

$$= \frac{-y - z}{2} + \frac{-y + z}{2} \sqrt{-3} = -\frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2} \sqrt{-3}.$$

Ubi observandum est, quod si q fit negativum & $\frac{q^3}{27}$ simul æquale $\frac{1}{4}r^2$, evanescente $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ fiet tam y quam $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r}$, adeoque prima radix $y + z = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}r}$, reliquæ autem, evanescente $\frac{y-z}{2} \sqrt{-3}$, evadent $-\frac{y+z}{2} = -y$ respective, adeoque coalescent in $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}r}$.

210. Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum, ubi q affirmativum est; vel ubi q negativum est & $\frac{q^3}{27}$ simul minus quam $\frac{1}{4}r^2$, adeoque $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ quantitas realis, id est, ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles; vel etiam ubi q negativum est & $\frac{q^3}{27}$ simul æquale $\frac{1}{4}r^2$, id est, ubi duæ ex radicibus sunt equales. At ubi q negativum est & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quam $\frac{1}{4}r^2$, fit $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ quantitas impossibilis, adeoque tres radices speciem ementiuntur impossibilem, ubi revera sunt omnes reales. Vide § 208.

211. Hic casus, qui vulgo appellatur *irreducibilis*, plus quam 200 annos analyistarum ingenia exercuit. De hoc

ita Schootenus *, “ Ubi $\frac{1}{4}r^2$ fit minus quam $\frac{-q^3}{27}$ ibi præ-

“ dicta regula non habet locum, nec ejusdem beneficio
 “ radix ullo modo intelligibili explicari potest. Quæ qui-
 “ dem res olim multæ fuit caliginis, & ut scribit *Albertus*
 “ *Girardus* in libello cui titulus, *Invention nouvelle en l’Al-*
 “ *gebra*, qui anno 1629 prodiit: *Hoc est in quo auctores hac-*
 “ *tenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear, in re quam*
 “ *maxime difficili.*” Nec minus in hoc etiamnum hærent
 Analystæ quam in circuli quadraturâ Geometræ †. Latet
 certe vitium in altera conditionum ad resolutionem datæ
 æquationis adscitarum. Nam licet quantitatem x duas in
 partes y & z dividere *semper* possibile sit, tamen partium
 rectangulum yz æquari $\frac{1}{4}q$ cum signo mutato *aliquando* im-
 possibile erit. Ubi quidem q affirmativum est, adeoque
 yz ($= -\frac{1}{4}q$) negativum, contraria fortientur signa y & z ,
 atque idcirco crescente minore quantitate z a nihilo ad in-
 finitum, si ita simul crescat y ut excessus ejus supra z sit
 semper æqualis x , crescet quoque rectangulum $-yz$ a ni-
 hilo ad infinitum, atque ideo alicubi inter crescendum fiet
 æquale $-\frac{1}{4}q$. Ubi vero q negativum est, evadet yz ($=$
 $-\frac{1}{4}q$) affirmativum, signis igitur similibus afficientur
 y & z , affirmativis utique si x affirmativum sit, negativis si
 fecus. Cæterum yz rectangulum sub partibus x transcen-

* Vide Schootenii *Comment. in opera Cartes*, vol. 1, p. 345.

† Prodiit anno superiore *Padue* liber cujus titulus saltem, desideratum hoc tandem suppleri posse expectationem præbet, *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile*, auct. *Giambat. Nicolai*, Algeb. Profess. At nondum ad manus pervenit.

dere nequit quadratum semissis x , seu $\frac{1}{2}x^2$. § 46. Et proinde conditio $yz = -\frac{1}{2}q$ plane impossibilis est ubi $-\frac{1}{2}q$ sit majus quam $\frac{1}{2}x^2$ seu (quod eodem redit) $\frac{1}{2}p^2$, adeoque $-\frac{q^3}{27}$ majus quam $\frac{1}{2}r^2$. per § 207. Et ex hypothese impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

212. Pergamus jam hujusce Regulæ usum exemplis illustrare.

Ex. 1. Sit æquatio resolvenda $x^3 + 30x = 117$. Erit $\frac{1}{2}r = \frac{117}{2}$, $\frac{1}{2}q = 10$, $\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} = \sqrt{\frac{13689}{4} + 1000} = \sqrt{\frac{17689}{4}}$
 $= \frac{133}{2}$, $y = \sqrt[3]{\frac{117}{2} + \frac{133}{2}} = \sqrt[3]{\frac{250}{2}} = \sqrt[3]{125} = 5$, & $z =$
 $\sqrt[3]{\frac{117}{2} - \frac{133}{2}} = \sqrt[3]{-\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{-8} = -2$. Ergo $y + z = 5$
 $- 2 = 3$, et reliquæ radices $-\frac{y+z}{2} \pm \frac{y-z}{2}\sqrt{-3} =$
 $= \frac{-3 \pm 7\sqrt{-3}}{2}$.

Ex. 2. Proponatur æquatio $u^3 + 3u^2 + 9u = 13$. Deleto termino secundo, substituendo nimirum $x - 1$ pro u , erit $x^3 + 6x = 20$. Adeoque $\frac{1}{2}r = 10$, $\frac{1}{2}q = 2$, $\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$
 $= \sqrt{100 + 8} = 10,3923$. Ergo, $y + z = \sqrt[3]{10 + 10,3923}$

$$+ \sqrt[3]{10 - 10,3923} = 2,732 - 0,732 = 2. \text{ Et } -\frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2} \sqrt{-3} = -1 \pm 1,732 \sqrt{-3}. \text{ Hinc } u = (x-1=) 1, \text{ vel } -2 \pm 1,732 \sqrt{-3}.$$

Ex. 3. Sit æquatio $u^6 - 3u^4 - 2u^2 = 8$. Depressâ æquatione et sublato termino secundo, substituendo utique $x + 1$ pro u^2 , prodit $x^3 - 5x = 12$. Adeoque $\frac{1}{2}r = 6$, $\frac{1}{2}q = \frac{5}{3}$, $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = \sqrt{36 - \frac{125}{27}} = 5,6009$. Ergo $y + z = \sqrt[3]{6 + 5,6009} + \sqrt[3]{6 - 5,6009} = 2,26376 + ,73624 = 3$. Et proinde $u^2 = (x + 1 =) 4$. Reliquæ radices ut in præcedentibus exemplis prodeunt impossibiles.

213. Aliquando binomiæ quantitatis (qualem parit hæc æquationis cubicæ resolutio) ex una parte rationali (sive hæc integra fuerit sive fracta) et alterâ irrationali, vel ex duabus irrationalibus ad inuicem incommensurabilibus conflata, radix cubica per binomiam simpliciore designari potest; ut olim exposuit *Bombellius*. Ex methodis autem in hunc finem excogitatis, *Wallisianam* * licet tentando fit, in praxi commodissimam reperi. Hanc idcirco in compendium redactam promotamque jam tradam.

* Vide *Wallis, Opera Mathematica*. vol. 2, p. 188, & seq.

INVESTIGATIO RADICIBUS BINOMII CUBI.

I.

214. Sit quantitas $A \pm \sqrt{B^2 Q}$ ex unâ parte integrâ A , et alterâ irrationali $\sqrt{B^2 Q}$ conflata. Reducatur $\sqrt{B^2 Q}$ ad formam simplicissimam $B\sqrt{Q}$ extrahendo quicquid est rationale, si modo B designet numerum ab unitate diversum. Sit radix quæsita $x \pm b\sqrt{y}$, et manifestum est, quod $b\sqrt{y}$ debet esse pars aliquota $B\sqrt{Q}$, adeoque b pars aliquota B et $\sqrt{y}$ ipsi $\sqrt{Q}$ æqualis; nisi enim hæc furda $\sqrt{Q}$ ingrederetur radicem ingredi non posset cubum. Erit igitur $x^3 \pm 3x^2b\sqrt{y} + 3xb^2y \pm b^3y\sqrt{y} = (x \pm b\sqrt{y})^3 = A \pm B\sqrt{Q}$. Adeoque pars integra cubi $x^3 + 3xb^2y = A$, & pars irrationalis $3x^2b\sqrt{y} + b^3y\sqrt{y}$ seu $(3x^2b + b^3y)\sqrt{y} = B\sqrt{Q}$. Unde dividendo per $\sqrt{y} = \sqrt{Q}$, prodit $3x^2b + b^3y = B$, adeoque per reductionem, $x^2 = \frac{B}{3b} - \frac{b^2y}{3}$, et $x = \pm \sqrt{\frac{B}{3b} - \frac{b^2y}{3}}$. Sigillatim jam substitue pro b , integros 1, 2, 3, &c. aut fractos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ &c. donec $\sqrt{\frac{B}{3b} - \frac{b^2y}{3}}$ emergat rationalis. Deinde substituto valore rationali x , si $x^3 + 3xb^2y$ evadit æqualis A , fiet quæsitum, et innotescet utraque pars radicis x & $b\sqrt{y}$, si modo radix extrahi potest.

Integros 1, 2, 3, &c. aut integrorum semiffes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. substituendos esse pro b , quò partibus radicis in se ductis emergat A integer, ita demonstrare licet.

Sit radix quæfita $\frac{x}{m} + \frac{b\sqrt{y}}{n}$, designantibus m et n integros ad x & $b\sqrt{y}$ respective primos; eritque $\frac{x^3}{m^3} + \frac{3x^2b\sqrt{y}}{m^2n}$ + $\frac{3xb^2y}{mn^2} + \frac{b^3y\sqrt{y}}{n^3}$ radicis cubus, ubi $\frac{x^3}{m^3} + \frac{3xb^2y}{mn^2}$ seu A , necnon $\frac{3x^2b}{m^2n} + \frac{b^3y}{n^3}$ seu B , debet esse integer. Ponatur $\frac{3x^2b}{m^2n} + \frac{b^3y}{n^3} = c$ int. Et concinnando erit $y = \frac{n^3c}{b^3} - \frac{3n^2x^2}{m^2b^2}$ integer, adeoque $\frac{3n^2}{m^2b^2} x^2$ integer, adeoque coefficientis $\frac{3n^2}{m^2b^2}$ integer, et n ex multiplis mb . Pone igitur $n = mb \times d$. Et substituto hoc valore n , prodit $y = m^3cd^3 - 3x^2d^2$. Atque substitutis iterum valoribus n & y jam inventis, prodit $\frac{x^3}{m^3} + \frac{3xb^2y}{mn^2} = 3xcd - \frac{8x^3}{m^3}$ integer, adeoque $\frac{8x^3}{m^3}$ integer, adeoque coefficientis $\frac{8}{m^3}$ integer. Et proinde $m^3 = 1$ vel 8 , et $m = 1$ vel 2 . Cæterum fuit $y = d^2 \times \overline{m^3cd - 3x^2}$, adeoque $\sqrt{y} = d \sqrt{m^3cd - 3x^2}$, adeoque altera pars radicis $\frac{b\sqrt{y}}{n} = \frac{bd\sqrt{m^3cd - 3x^2}}{mbd} = \frac{\sqrt{m^3cd - 3x^2}}{m}$. Ergo, utraque pars radicis communem habet denominatorem $m = 1$ ubi x & b sunt integri, vel $= 2$ ubi sunt fracti.

215. Porro, ne operam frustrà insumamus tentando successive valores inutiles b , observandum est quod crescente b , decrescet $x = \sqrt{\frac{B}{3b} - \frac{b^2y}{3}}$; aut vice versâ. Et proinde si justò majus assumatur b , justò minus emerget x , adeoque $x^3 + 3b^2y$ minus quam A ; aut vice versâ.

Secundum Methodum *Wallisianam* radicibus exquirendis solummodo adhibentur valores affirmativi x ; at ope valorum negativorum x aliæ insuper radices explorari possunt.

216. *Ex. 1.* Si quærat^rur radix cubica quantitatis $10 + \sqrt{108}$ seu $10 + 6\sqrt{3}$; substituto 1 pro b , prodit $x = \sqrt{\frac{B}{3b} - \frac{b^2y}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3} - \frac{3}{3}} = 1$. Deinde substituto 1 pro x in æquationem $x^3 + 3xb^2y = A$, prodit $1 + 9 = 10$, ut oportet. Ergo radix tentanda $1 + \sqrt{3}$. Hujus autem cubus per multiplicationem dat $10 + \sqrt{108}$; itaque fiet quæsitum.

Ex. 2. Sit radix cubica extrahenda ex $\sqrt{968} + 25$ seu $22\sqrt{2} + 25$. Substituto 1 pro b , prodit $x = \sqrt{\frac{22}{3} - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}}$. Res igitur non succedit, emergente x irrationali. Substituatur iterum 2 pro b , et prodit $x = \sqrt{\frac{22}{6} - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = 1$. Deinde, substituto 1 pro x , æquatio $x^3 + 3xb^2y$

$= A$, evadit $1 + 24 = 25$, ut oportet. Ergo radix tentanda $2\sqrt{2} + 1$.

Ex. 3. Si radix cubica extrahenda fit ex $2 + \sqrt{5}$, substituto 1 pro b prodit $x = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{5}{3}} = \sqrt{-\frac{4}{3}}$ impossibilis, quod indicio est b non fortiri valorem integrum. Substituatur itaque $\frac{1}{2}$ pro b , et prodit $x = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, quo substituto, &c. evadit $\frac{1 + 15}{8} = 2$; ut oportet. Adeoque radix tentanda $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Atque hic quidem notandum, quod radicibus eruendis ubi x & b sunt fracti, per se impares sunt methodus *Newtoniana* & *Clairautiana*, atque idcirco ulteriore egent artificio quo hujusmodi exemplis accommodentur.

217. Aliquando formam irrationalem induunt x & b .
Nam

Ex. 4. Si radix cubica extrahenda fit ex $68 - \sqrt{4734}$ feu, $68 - 27\sqrt{6}$, valoribus x & b rationalibus frustra tentatis, radicem nihilominus eruere licet multiplicando quantitatem datam per $\frac{2}{3}$, unde prodit $\frac{136 - 54\sqrt{6}}{2}$, idem scilicet quantitatis valor. Dein extractâ seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubicâ inveniatur radix quæsitâ

$$\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}.$$

II.

218. Si quantitatis $A \pm B\sqrt{Q}$ pars A sit fractio, reducuntur partes ad communem denominatorem. Dein ut antea, extractâ seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur radix quæsitâ, si modo extrahi potest.

Ex. 5. Si ex $\sqrt{242} = 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda sit; reductis partibus ad communem denominatorem fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein extractâ radice cubica, &c. orietur $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$ radix quæsitâ.

III.

219. Quantitatis $A \pm B\sqrt{-Q}$ fit una pars A rationalis, altera $B\sqrt{-Q}$ impossibilis. Designante $x + b\sqrt{-y}$ radicem, multiplicando erit $x^3 \pm 3x^2b\sqrt{-y} - 3xb^2y \mp b^3y\sqrt{-y} = A \pm B\sqrt{-Q}$. Adeoque $x^3 - 3xb^2y = A$, & $3x^2b - b^3y = B$, et $x = \pm \sqrt{\frac{B}{3b} + \frac{b^2y}{3}}$. Deinde operando ut antea, eruetur radix, si modo extrahi potest *.

* His vestigiis insistendo methodum proferre possumus extrahendi radicem quadraticam binomii $A \pm B\sqrt{Q}$, ex parte integra A & irrationali $B\sqrt{Q}$ conflati,

Ex. 6. Sit radix cubica extrahenda ex $-5 \pm \sqrt{-2}$.
 Ponatur $b = 1$, eritque $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 1$. Quo valore
 x substituto prodit $x^3 - 3xb^2y = 1 - 6 = -5$, ut oportet.
 Ergo radix tentanda $1 \pm \sqrt{-2}$, quæ utique per multiplicationem dat $-5 \pm \sqrt{-2}$.

220. Miror itaque unde *Saunderson* ad *De Moivre* scribens, profitetur, "Se nihil ad rem deprehendisse, de extrahenda radice cubica binomii impossibilis, instar
 " $-5 + \sqrt{-2}$ vel $-5 - \sqrt{-2}$, ne quidem apud ipsum
 "*Wallis* qui hoc aggreditur." Magisque miror unde in

Newtonianâ § 52, in praxi commodiorem. Designante enim $x \pm b\sqrt{y}$ radicem, erit $x^3 \pm 2xb\sqrt{y} + b^2y = A \pm B\sqrt{Q}$, adeoque $x^3 + b^2y = A$; $2xb = B$, et inde $x = \frac{B}{2b}$. Deinde figillatim sumendo $b = 1, 2, 3$, &c. substituantur valores x resultantes, donec $x^3 + b^2y$ evadat æqualis A ; et fiet quæsitum, si modo radix extrahi potest. Ut si extrahenda sit radix ex $3 + \sqrt{8}$ seu $3 + 2\sqrt{2}$; sume $b = 1$, eritque $x = \frac{2}{2} = 1$, quo substituto prodit $x^3 + b^2y = 1 + 2 = 3$, ut oportet. Ergo radix tentanda $1 + \sqrt{2}$.

Quod si $B\sqrt{Q}$ sit impossibilis, erit $x^3 - b^2y = A$, cæteris manentibus. (Radicem, in hoc casu, designante $x \pm b\sqrt{-y}$.) Ut si quæzatur radix quadratica quantitatis impossibilis $1 \pm 4\sqrt{-3}$; sume $b = 1$, eritque $x = \frac{4}{2} = 2$. Quo substituto, prodit $x^3 - b^2y = 4 - 3 = 1$, ut oportet. Ergo radix tentanda $2 \pm \sqrt{-3}$.

regulam *Wallisianam* animadvertit *De Moivre*, quasi “*petitio principii* foret, aut saltem tentamen quod radice eruenda sæpe deficeretur.” In *Logicis* certe parum versatum fuisse videtur *De Moivre*, aut hanc regulam ad *petitionem principii* vix retulerit; et æquo saltem jure, in regulam *pro inventione Divisorum*, adeo decantatam, animadvertere potuerit, cum hæc quoque non nisi tentando succedit. Vide *Append. ad Saunderson, Algeb. vol. II. p. 743.*

Ex. 7. Si quærat $\sqrt[3]{81 + \sqrt{-2700}} = \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}}$; ponendo $b = 1$, erit $x = \sqrt[3]{11}$. Res igitur non succedit, emergente x irrationali. Rursus, ponendo $b = 2$, erit $x = \pm \sqrt[3]{9} = \pm 3$. Si substituatur $+ 3$ pro x , prodit $x^3 - 3xb^2y = 27 - 108 = -81$, adeoque res non succedit, quoniam signo affirmativo affici debet 81 . At si substituatur $- 3$ pro x , prodit $- 27 + 108 = + 81$; ut oportet. Ergo radix tentanda $- 3 + 2\sqrt{-2}$.

Altera quoque radix erui potest fumendo $b = \frac{1}{2}$, unde erit $x = \sqrt[3]{20 + \frac{1}{4}} = \frac{9}{2}$, adeoque $x^3 - 3xb^2y = \frac{729}{8} - \frac{81}{8} = 81$; ut oportet. Ergo radix tentanda $\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

221. Cæterum in hujusmodi operationibus si cubi partes communem habent divisorem cubicum, satius erit radices factorum seorsim extrahere. Sic in novissimo exemplo, $81 + \sqrt{-2700} = 27 \times 3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, radicibus factorum

feorfim extractis, valet radix quæfita $3 \times \sqrt{-1 + 2\sqrt{-\frac{1}{3}}}$
 $= -3 + 2\sqrt{-\frac{9}{3}} = -3 + 2\sqrt{-3}$, ut in priore cafu;
 et altera radix $3 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, ut in
 posteriore.

IV.

222. Sit quantitas $A\sqrt{P} \pm B\sqrt{Q}$, cujus utraque pars ir-
 rationalis eft. Designante $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$ radicem, multi-
 plicando erit $a^3x\sqrt{x} \pm 3a^2xb\sqrt{y} + 3ab^2y\sqrt{x} \pm b^3y\sqrt{y}$
 $= A\sqrt{P} \pm B\sqrt{Q}$; adeoque, $a^3x + 3ab^2y = A$ & $3a^2xb$
 $+ b^3y = B$, unde prodit $a = \sqrt{\frac{B}{3xb} - \frac{b^2y}{3x}}$. Pro x fubfti-
 tue jam valorem fuum P ; et fubftitue figillatim pro b in-
 tegros 1, 2, 3, &c. donec eruatur valor a rationalis; quo
 fubftituto, fi $a^3x + 3ab^2y$ prodeat æqualis A , fiet quæ-
 fitum.

Ex. 8. Si radix cubica extrahenda eft ex $\sqrt{5408} + \sqrt{5400}$
 feu $52\sqrt{2} \pm 30\sqrt{6}$; fume $b = 1$, evadetque $a = \sqrt{5} - 1$
 $= 2$. Et hoc valore a fubftituto, prodit $a^3x + 3ab^2y = 16$
 $+ 36 = 52$, ut oportet. Ergo radix tentanda $2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM CUBICARUM PER EX-
TRACTIONEM RADICIS BINOMII CUBI.

223. Aliquando radices in *casu irreducibili* exprimere possibile erit, ubi scilicet radices valorum y & z ope regulæ jam allatæ cubice extrahere licet. Nam quod singulis membris videtur impossibile, mutua connexione destruetur*.

Ex. 1. Proponatur æquatio $x^3 - 15x = 4$. Erit $\frac{1}{3}r$
 $= 2$, $\frac{1}{3}q = 5$, $\sqrt[3]{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = \sqrt[3]{4 - 125} = \sqrt[3]{-121} = 11\sqrt{-1}$,

* *Symbola imaginaria* proprie quidem calculum respuunt, cum sint tantum impossibilitatis signa; verumtamen ubi quantitates reales designare ponuntur (ut in hoc casu) quod mirum & paradoxum instar videatur, ex earum summis, productis & rationibus secundum regulas arithmeticas computatis, veræ & legitimæ sequuntur conclusiones. Ita ut Geometria, etsi calculum quantitatum impossibilium proprie non agnoscit, tamen conclusiones inde elicatas demonstrationibus accuratissimis munit atque stabilit. Cæterum signis imaginariis quantitates adumbrari reales ibi tantum conceditur, ubi quæstio sit de mensuris angulorum aut rationum, idque propter arcum nexum & affinitatem inter arcus circulares & sectores hyperbolicos intercedentem. Atque hinc oritur quod conclusiones his propriæ ad illos per analogiam transferuntur. Sic iidem prodeunt valores rectorum sub sinus & cosinus sectorum circulatorum, atque sub ordinatis & abscissis sectorum hyperbolicorum; calculo in utroque casu similiter instituto, nisi quod in priore, mediantibus signis imaginariis, in posteriore, significantibus ad eandem conclusionem devenitur. At hoc tantum hic loci monuisse fas est. Adeat lector horum studiosus, *Playfair, on the arithmetic of impossible quantities, Phil. Transact. an. 1778, p. 318.*

adeoque $y + z = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$
 $= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Itemque $-\frac{y+z}{2} \pm$
 $\frac{y-z}{2}\sqrt{-3} = -2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-3} = -2 \pm \sqrt{3}$. In
hoc exemplo igitur prima radix 4 est maxima.

Ex. 2. Sit $x^3 - 6x = 4$. Erit $\frac{1}{2}r = 2$, $\frac{1}{3}q = 2$,
 $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = \sqrt{4 - 8} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$. Adeoque $y + z$
 $= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}} = -1 + \sqrt{-1}$
 $- 1 - \sqrt{-1} = -2$. Itemque $-\frac{y+z}{2} \pm \frac{y-z}{2}$
 $\sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{3}$, ubi prima radix
 -2 est media.

Ex. 3. Sit $x^3 - 9x = -10$. Erit $\frac{1}{2}r = 5$, $\frac{1}{3}q = 3$,
 $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = \sqrt{25 - 27} = \sqrt{-2}$. Adeoque $y + z =$
 $\sqrt[3]{-5 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{-2}} = 1 + \sqrt{-2} + 1 -$
 $\sqrt{-2} = 2$. Itemque $-\frac{y+z}{2} \pm \frac{y-z}{2}\sqrt{-3} = -1$
 $\pm \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{6}$. Ubi prima radix 2 est
media.

Ex. 4. Sit $x^3 - 15x = 22$. Erit $\frac{1}{2}r = 11$, $\frac{1}{2}q = 5$,
 $\sqrt[3]{\frac{r^3}{4} - \frac{q^3}{27}} = \sqrt[3]{121 - 125} = \sqrt[3]{-4}$. Adeoque $y + z =$
 $\sqrt[3]{11 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{11 - \sqrt{-4}} = -1 + \sqrt{-4} - 1 - \sqrt{-4}$
 $= -2$. Itemque $-\frac{y+z}{2} \pm \frac{y-z}{2}\sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{-4}$.
 $\sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{12}$. Ubi prima radix -2 est minima.

Hinc liquet, primam radicem hac methodo inventam trium radicum realium unamquamque indifferenter designare posse, non maximam solum, ut vulgo perhibent.

In casu reducibili quoque aliquando facilius erui possunt radices ope regulæ allatæ. Ut si repetatur æquatio $x^3 + 6x = 20$, prodit $y + z = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$; ut antea, § 212.

224. Cæterum deficiente *Cardani* regula ubi binomiarum impossibilium inde resultantium radices cubicæ accurate extrahi nequeunt, ad theorema binomium confugiendum erit, cujus ope harum radices *semper* per series infinitas proxime exponi possunt, secundum methodum quam primus excogitasse videtur *Leibnitz*, § 205, tradiderunt verò *Ronayne*, *Algebra*, 8^{vo} Lond. 1717, & Edit. 2^a 1727, et *Nicole*. *Mem. de l'Acad. Paris*, 1738.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM CUBICARUM PER
SERIES INFINITAS.

225. Abbreviandi gratiâ ponatur $\frac{1}{3}r = a$, & $\sqrt[3]{\frac{r^3}{4} \pm \frac{q^3}{27}}$
 $= \sqrt[3]{\pm c}$, scilicet $= \sqrt[3]{c}$ in casu reducibili, et $\sqrt[3]{-c}$ in
 casu irreducibili. Per theorema binomium, erit in priore
 casu,

I.

$$y = (a + \sqrt[3]{c})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \times : 1 + \frac{\sqrt[3]{c}}{3a} - \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} + \frac{2 \cdot 5c \sqrt[3]{c}}{3 \cdot 6 \cdot 9a^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12a^4}$$

$$z = (a - \sqrt[3]{c})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \times : 1 - \frac{\sqrt[3]{c}}{3a} - \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} - \frac{2 \cdot 5c \sqrt[3]{c}}{3 \cdot 6 \cdot 9a^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12a^4}$$

$$\therefore y + z = 2\sqrt[3]{a} \times : 1 * - \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} * - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12a^4}$$

&c.

Exponet itaque series $2\sqrt[3]{a} \times : 1 - \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} - \&c.$ primam
 radicem, qualem invenerunt *Ronayne* & *Nicole*. Erit quoque

$$y - z = 2\sqrt[3]{a} \times : * + \frac{\sqrt[3]{c}}{3a} * + \frac{2 \cdot 5c \sqrt[3]{c}}{3 \cdot 6 \cdot 9a^3} * \&c.$$

$$= 2\sqrt[3]{a} \times \frac{\sqrt[3]{c}}{a} \times : \frac{1}{3} * + \frac{2 \cdot 5c}{3 \cdot 6 \cdot 9a^2} * \&c.$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a^3}} \text{ seu } \frac{2\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a^2}} \times : \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 5c}{3 \cdot 6 \cdot 9a^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 11c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15a^4}$$

&c.

Adeoque reliquæ radices, quales exposuit *Clairaut*,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{y+z}{2} \\ \pm \frac{y-z}{2} \sqrt{-3} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} -\sqrt[3]{a} \times : 1 - \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12a^4} \&c. \\ +\frac{\sqrt[3]{-3c}}{\sqrt[3]{a^2}} \times : \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 5c}{3 \cdot 6 \cdot 9a^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15a^4} \&c. \end{aligned} \right.$$

II.

Et in posteriore casu, erunt radices,

$$y+z = 2\sqrt[3]{a} \times : 1 + \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12a^4} + \&c.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{et } -\frac{y+z}{2} \\ \pm \frac{y-z}{2} \sqrt{-3} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} -\sqrt[3]{a} \times : 1 + \frac{2c}{3 \cdot 6a^2} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12a^4} + \&c. \\ +\frac{\sqrt[3]{-3c}}{\sqrt[3]{a^2}} \times : \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 5c}{3 \cdot 6 \cdot 9a^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11c^2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15a^4} - \&c. \end{aligned} \right.$$

Mutatis scilicet signis terminorum alternorum a secundo incipientium, utpote qui potestates impares quantitatis jam negativæ — c involvunt.

226. Si $-\frac{q^3}{27}$ fit duplum $\frac{1}{4}r^2$, simplicius efferri possunt

hæ series. Nam ob $\sqrt{c}$ in hoc casu æquale a , erit $\frac{\sqrt{c}}{a} = 1$.

Adeoque, prima radix,

$$y + z = 2\sqrt[3]{a} \times : 1 + \frac{2}{3.6} - \frac{2.5.8}{3.6.9.12} + \frac{2.5.8.11.14}{3.6.9.12.15.18} - \&c.$$

$$\text{Et reliquæ,} = \begin{cases} -\sqrt[3]{a} \times : 1 + \frac{2}{3.6} - \frac{2.5.8}{3.6.9.12} + \&c. \\ \pm \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{-3} \times : \frac{1}{3} - \frac{2.5}{3.6.9} + \frac{2.5.8.11}{3.6.9.12.15} - \&c. \end{cases}$$

227. Cæterum hæ series radicibus eruendis *directe* inferviunt tantum ubi convergunt, hoc est, si $-\frac{q^3}{27}$ non fit duplo majus quam $\frac{1}{4}r^2$, adeoque $\sqrt{c}$ non majus quam a . Et quo proprius $-\frac{q^3}{27}$ accedit ad $\frac{1}{4}r^2$, eo minus evadet $\sqrt{c}$ respectu a , et proinde eo citius converget series ex evolutione $(a \pm \sqrt{c})^{\frac{1}{3}}$ oriunda. Quod si $\frac{q^3}{27}$ affirmativum sit, aut si negativum sit & simul duplo majus quam $\frac{1}{4}r^2$, foret $\sqrt{c}$ majus quam a , unde divergeret series. In hoc casu igitur *invertendi* sunt termini a & $\sqrt{c}$; nam ex evolutione $(\sqrt{c} \pm a)^{\frac{1}{3}}$ prodibit series convergens ejusdem valoris. Adeoque in casu reducibili erit

III.

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{c} + a}, \& z = \sqrt[3]{-\sqrt{c} + a} = -\sqrt[3]{\sqrt{c} - a}.$$

$$\therefore y = (\sqrt{c} + a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c^{\frac{1}{2}}} \times : 1 + \frac{a}{3\sqrt{c}} - \frac{2a^2}{3.6c} + \frac{2.5a^3}{3.6.9c\sqrt{c}} - \&c.$$

$$z = -(\sqrt{c} - a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c^{\frac{1}{2}}} \times : -1 + \frac{a}{3\sqrt{c}} + \frac{2a^2}{3.6c} + \frac{2.5a^3}{3.6.9c\sqrt{c}} + \&c.$$

$$\begin{aligned} \text{Et } y + z &= 2\sqrt[3]{c^{-\frac{1}{2}}} \times : * + \frac{a}{3\sqrt{c}} * + \frac{2 \cdot 5a^3}{3 \cdot 6 \cdot 9c\sqrt{c}} * + \&c. \\ &= 2\sqrt[3]{c^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{c}} \text{ feu } \frac{2a}{\sqrt[6]{c^2}} \text{ feu } \frac{2a}{\sqrt[3]{c}} \times : \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 5a^3}{3 \cdot 6 \cdot 9c} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11a^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15c^2} + \&c. \end{aligned}$$

exponet primam radicem, qualem invenit *Clairaut*.

Itemque,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{y+z}{2} \\ \pm \frac{y-z}{2} \sqrt{-3} \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} -\frac{a}{3\sqrt{c}} \times : \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 5a^2}{3 \cdot 6 \cdot 9c} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11a^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15c^2} + \&c. \\ \pm \sqrt[3]{c^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{-3} \times : 1 - \frac{2a^2}{3 \cdot 6c} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8a^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12c^2} - \&c. \end{aligned} \right.$$

reliquas, quales invenit *Hutton*.

IV.

Et in casu irreducibili erit prima radix

$$= \frac{-2a}{\sqrt[3]{c}} \times : \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 5a^2}{3 \cdot 6 \cdot 9c} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11a^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15c^2} - \&c.$$

Et reliquæ,

$$= \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[3]{c}} \times : \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 5a^2}{3 \cdot 6 \cdot 9c} + \&c. \\ \pm \sqrt[3]{c^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{3} \times : 1 + \frac{2a^2}{3 \cdot 6c} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8a^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12c^2} + \&c. \end{aligned} \right.$$

228. Pergamus jam harum serierum usum exemplis illustrare.

Ex. 1. Sit æquatio $x^3 - 12,03x = 16$. Erit $a = 8$,
 $-c = -481201$ adeoque ob c negativum & multò
 minus quam a^3 , ad hibendæ series II. citissimè convergentes.
 Erit igitur

$$\frac{c}{a^3} = \frac{481201}{64} = ,007518 \cdot \frac{c^2}{a^4} = ,0000565$$

$$\frac{1c}{9a^3} = \frac{,007518}{9} = ,000835 \cdot \frac{10c^2}{243a^4} = \frac{,000565}{243} = ,0000023$$

$$\begin{array}{r} 1,000835 \\ - ,000002 \\ \hline \end{array} \quad \frac{\sqrt{3c}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{,12015}{4}$$

$$1 + \frac{c}{9a^3} - \frac{10c^2}{243a^4} = 1,000833$$

$$\times 2\sqrt[3]{a} = 4$$

$$\frac{\sqrt{3c}}{\sqrt[3]{a^3}} \times \frac{1}{3} = \frac{,03003}{3} = ,010013.$$

Prima radix, 4,003332

$$- \sqrt[3]{a} \times : 1 + \frac{c}{9a^3} = - 2,001666$$

$$\pm \frac{\sqrt{3c}}{\sqrt[3]{a^3}} \times \frac{1}{3} - - = \pm ,010013$$

Media radix, - - - 2,011679

Ultima, - - - 1,991653.

Ex. 2. Sit æquatio $x^3 - 50x = 120$. Erit $a = 60$,
 $c = -1029,629629$. Adeoque adhibendæ series II.
 Erit igitur,

$$\frac{c}{a^2} = ,286008 \cdot \frac{c^2}{a^4} = ,081800 \cdot \frac{c^3}{a^6} = ,023395$$

$$\frac{1c}{9a^2} = ,031778 \cdot \frac{10c^2}{243a^4} = ,003353 \cdot \frac{154c^3}{6561a^6} = ,000549$$

$$\begin{array}{r} 1,031778 \\ + 000549 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{,555777}{15,3263} = ,036262$$

$$\begin{array}{r} 1,032327 \\ - ,003353 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{10c}{162a^2} = \frac{2,86008}{162} = ,017654$$

$$\begin{array}{r} 1,028974 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{10c}{162a^2} = + ,333333 \\ - ,017654 \\ \hline$$

$$2,057948$$

$$+ ,315679$$

$$\times \sqrt[3]{a} = 3,914867$$

$$\times \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a^2}} = ,036262$$

$$\text{Prim. rad.} = 8,056592 *$$

$$\begin{cases} - 4,028296 \\ \pm ,096647 \end{cases}$$

$$,096647$$

$$\text{Media, } - 4,124943$$

$$\text{Ultima, } - 3,931649.$$

* Si ex diametro tribusque circuli chordis contiguis factis fiat trapezium circulo inscriptum, datis chordis a, b, c erui potest diameter x per resolutionem æquationis $x^3 - (a^3 + b^3 + c^3) x = 2abc$, quam ex mutuis harum relationibus vario artificio educit *Newtonus, Arith. Univers.* Ed. 2, p. 101, &c. Ut si chordas respective designent numeri 3, 4, 5, resolutio æquationis resultantis $x^3 - 50x = 120$, dabit $x = 8,056$ &c. reliquæ verò radices $- 4,124$ &c. et $- 3,931$ &c. utpote negativæ aliò referuntur, nec si evaderent affirmativæ diametrum designare possent, ob limitationem in schemate, cum rectarum circulo inscriptarum maximus prodit diameter. § 134. Vide *Maseres, Dissert. on Cardan's rule, Phil. Transf. an. 1778.*

229. Cæterum ubi plures serierum termini radicibus designandis requiruntur, in numeros profusiores excurrer calculus, plurimum vero minuetur labor combinando serierum terminos inter operandum inventos, & adhibendo logarithmos; ut in exemplis sequentibus.

Ex. 3. Sit æquatio $x^3 - 15x = 22$. Erit $a = 11$ & $c = -4$. Adeoque adhibendæ series II. Erit quoque $\frac{c}{a^2} = \frac{4}{121} = \frac{1}{30,25}$. Et combinando terminos inter operandum inventos, erit

$$\begin{array}{rcl}
 A = & = 1,0000000 & \\
 B = \frac{2c}{3.6a^2} A = & 36731 & C = \frac{5.8c}{9.12a^2} = -0,0000450. \\
 D = \frac{11.14c}{15.18a^2} C = & 8 & \\
 & + 1,0036739 & \\
 & - 0,0000450 & \\
 \hline
 \text{Prima series} & = 1,0066289 & \\
 & \times 2 & \\
 \hline
 & 2,0072578 & - - - \log. 0,3026031 \\
 & \times \sqrt[3]{11} & - - - 0,3471309 \\
 \hline
 \text{Prima radix} & = 4,4641016 & - - - 0,6497340.
 \end{array}$$

Itemque,

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha = \frac{1}{3} & A = ,3333333 & \beta = \frac{5}{9} & B = ,0020406 \\
 \gamma = \frac{11}{15} & C = 330 & \delta = \frac{17}{21} & D = 7 \\
 & + ,3333663 & & - ,0020413 \\
 & - ,0020413 & & \\
 & \hline
 & ,3313250 & & \\
 & \times 2 & & \\
 & \hline
 & ,6626500 & - & - \log. 1,8212842 \\
 & \times \sqrt{3} & - & - 0,2385606 \\
 & \times \sqrt[3]{121} & - & - 0,6942618 \\
 & \hline
 \text{Postrema series} & \pm ,2320508 & - & - 1,3655830 \\
 - \frac{1}{2} \text{ pri. rad.} & - 2,2320588 & & \\
 & \hline
 \text{Media rad.} & = - 2,4641016 & & \\
 \text{Ult. radix} & = - 2,0000000 & &
 \end{array}$$

Ex. 4. In æquatione $x^3 - 9x = -10$, prodit $a = -5$,
 $c = 25 - 27 = -2$. Adhibendæ igitur series II.

Et existente $\frac{c}{a^3} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} = ,08$. erit

$A =$	$= 1$	
$B = \frac{2c}{3.6a^3}$	$A = 0,0088889$	$C = \frac{5.8c}{9.12a^2}$
$D = \frac{11.14c}{15.18a^3}$	$C =$	$E = \frac{17.20c}{21.24a^3}$
	120	$D =$
	$+ 1,0089009$	$- ,0002641$
	$- 0,0002641$	
	$+ 1,0086368$	
	2	
	$2,0172736$	$\log. 0,3047649$
	$\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{5}$	$- 0,2329900$
	$Prima rad. = 3,44948974$	$- 0,5377549$

Itemque,

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad A = ,3333333 \quad \beta = \frac{5}{9} \quad B = ,0049383$$

$$\gamma = \frac{11}{15} \quad C = 1931 \quad \delta = \frac{17}{21} \quad D = 97$$

$$\epsilon = \frac{23}{27} \quad E = 6 \quad \text{---} ,0049480$$

$$+ ,3335270$$

$$\text{---} ,0049480$$

$$,3285790 \quad - \quad - \quad \log. \quad \bar{1},5166398$$

$$\frac{\sqrt[3]{3^c}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{25}} \quad - \quad - \quad - \quad \bar{1},9230956$$

$$\text{Altera series} \quad \pm ,27525513 \quad \bar{1},4397354$$

$$- \frac{1}{2} \text{ pri. rad. } + 1,72474487$$

$$\text{Media radix} \quad 2,00000000$$

$$\text{Ultima radix} \quad 1,44948974$$

Ex. 5. Sit æquatio $x^3 - 6x = 4$. Prodit $a = 2$, $\sqrt{c} = \sqrt{4-8} = \sqrt{-4}$; adeoque ob $\sqrt{c} = a$, adhibendæ ferries § 226. His autem tardius convergentibus, tot proferre terminos quot radicibus proxime designandis postulantur molestum foret. Hujus radices § 223 supra, prodierunt -2 , & $1 + \sqrt{3}$.

Ex. 6. Sit æquatio $x^3 - 15x = 4$. Erit $a = 2$, $\sqrt{c} = \sqrt{4 - 125} = \sqrt{-121}$, adeoque ob $\sqrt{c}$ majus quam a , adhibendæ series IV. Existente igitur $\frac{a^2}{c} = \frac{4}{121}$. Erit,

$$\begin{array}{rcl}
 & + & - \\
 A = \frac{1}{3} & = ,3333333 & B = \frac{2.5a^2}{6.9c} A = ,0020406 \\
 C = \frac{8.11a^2}{12.15c} B = & 330 & D = \frac{14.17}{18.21} C = 7 \\
 & + ,3333663 & - ,0020413 \\
 & - ,0020413 &
 \end{array}$$

Prima series - ,3313250 - - - log. 1,5202543

$$\frac{4}{\sqrt[3]{121}} = \sqrt[3]{\frac{64}{121}} - - - 2,9077982$$

Prima radix - ,2679492 - - - 1,4280525

Itemque,

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha = \frac{3}{1} & A = 1 & \\
 \beta = \frac{9}{5} & B = 0,0036731 & \gamma = \frac{15}{11} C = -0,0000450 \\
 \delta = \frac{21}{17} & D = 8 & \\
 \hline
 & + 1,0036739 & \\
 & - 0000450 & \\
 \hline
 & 1,0036289 & - - - \log. 0,0015732 \\
 & \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{11} & - - - 0,3471309 \\
 & \sqrt{3} & - - - 0,2385606 \\
 & \pm 3,8660254 & - - - 0,5872647 \\
 \\
 -\frac{1}{2} \text{ primæ rad.} & + 0,1339746 & \\
 \hline
 \text{Secunda radix} & + 4,0000000 & \\
 \text{Tertia radix} & - 3,7320508. &
 \end{array}$$

230. Possint quoque series utriusque classis tam directæ quam inversæ, in præcedentibus adhibitæ in alias quæ citius convergant transmutari. Verum de his differere non patitur nostri instituti ratio. Consulat lector harum studiosus auctorem supra laudatum, *Hutton*, qui rem totam penitus explorat, fufiusque explicat.

DE ÆQUATIONUM BIQUADRATICARUM RESOLUTIONE.

229. Æquationum biquadraticarum resolutionem primus invenit *Ferrarius*. Docuit vero *Cartesius* methodo insequente radices æquationum biquadraticarum mediantibus cubicis eruere & exprimere.

Tollendus est primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans $x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0$. Pone hanc multiplicatione duarum quadraticarum $x^2 + ex + f = 0$, & $x^2 - ex + g = 0$ generari, id est, eandem esse cum hac $x^4 + (f + g - e^2)x^2 + (eg - ef)x + fg = 0$, ubi necesse est ut quadraticarum termini secundi sint iidem & contrariis signis affecti, quo evanescat secundus terminus biquadraticæ resultantis. Et collatis biquadraticarum terminis homologis, fiet $f + g - e^2 = Q$, $eg - ef = R$, & $fg = S$. Quare erit

$$f + g = e^2 + Q$$

$$f - g = -\frac{R}{e}$$

$$\text{Adeoque } 2f = e^2 + Q - \frac{R}{e}$$

$$\text{Et } - * 2g = e^2 + Q + \frac{R}{e}$$

$$\text{Adeoque } 4fg = e^4 + 2Qe^2 + Q^2 - \frac{R^2}{e^2} = 4S$$

$$\text{Sive } - - - e^6 + 2Qe^4 + (Q^2 - 4S)e^2 - R^2 = 0$$

$$\text{Et posito } y = e^2, \quad y^3 + 2Qy^2 + (Q^2 - 4S)y - R^2 = 0.$$

Æquationis cubicæ jam resultantis extrahatur radix. Dein habitâ illa radice regrediendum erit, ponendo $\sqrt{y} = e$,

$$\frac{e^2 + Q - \frac{R}{e}}{2} = f, \quad \frac{e^2 + Q + \frac{R}{e}}{2} = g, \quad \& \text{ æquationes duæ}$$

$$x^2 + ex + f = 0, \quad \& \quad x^2 - ex + g = 0,$$
 extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0.$$

Ut si proponatur æquatio $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$. Tolle secundum terminum scribendo $v + \frac{1}{4}$ pro x ,
 & orietur $v^4 - \frac{43}{8}v^3 + \frac{75}{8}v - \frac{851}{256} = 0$. Ad tollendas
 fractiones scribe $\frac{1}{4}z$ pro v , & orietur $z^4 - 86z^2 + 600z - 851 = 0$. Hic est $-86 = Q$, $600 = R$, & $-851 = S$, adeoque
 $y^3 + 2Qy^2 + (Q^2 - 4S)y - R^2 = 0$, substitutis æquipollentibus fiet
 $y^3 - 172y^2 + 10800y - 360000 = 0$. Unde per inventionem divisorum, prodibit
 $y = 100$. Dein habito y , radix ejus 10 erit e , $\frac{-86 + 100 - 60}{2}$
 seu -23 erit f , & $+37$ erit g . Unde prodeunt æqua-
 tiones quadraticæ $z^2 + 10z - 23 = 0$, & $z^2 - 10z + 37 = 0$, adeoque per reductionem,
 $z = -5 \pm 4\sqrt{3}$, &
 $z = +5 \pm 2\sqrt{-3}$. Ergo erit $x = (v + \frac{1}{4} = \frac{z + 1}{4} =)$
 $-1 \pm \sqrt{3}$, & $x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$, quæ erunt quatuor radices
 æquationis sub initio propositæ $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$.

230. Aliam methodum eruendi radices æquationum biquadraticarum mediantibus cubicis, aliquando concinniorem tradit *Euler*, quam sic investigare licet. Vide *Euler*, *Elem. Algebrae*, Tom. 1; aut *Martin*, *Elem. de Mathem. Toulouse*, 1781.

Assumamus æquationem cubicam $y^3 - P'y^2 + Q'y - R' = 0$ cujus radices sint a, b, c . Sitque $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Quadrando erit

$$x^2 = a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})$$

$$\text{Seu} \quad x^2 = P' + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})$$

$$\text{Adeoque} \quad x^2 - P' = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})$$

$$\text{Et quadr.} \quad x^4 - 2P'x^2 + P'^2 = 4(ab + ac + bc) + 8\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\text{Seu} \quad x^4 - 2P'x^2 + P'^2 = 4Q' + 8\sqrt{R'}x$$

$$\text{Ergo} \quad x^4 - 2P'x^2 - 8\sqrt{R'}x + P'^2 - 4Q' = 0.$$

Hujus itaque æquationis biquadraticæ una radix necessario erit $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, ut ex compositione manifestum est. Jam quo eruantur coefficientes æquationis cubicæ adscititiæ $y^3 - P'y^2 + Q'y - R' = 0$, collatis inter se terminis homologis æquationis biquadraticæ novissime resultantis & datæ $x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0$, erit

$$-2P' = Q, \text{ adeoque } P' = -\frac{1}{2}Q$$

$$-8\sqrt{R'} = R, \text{ adeoque } R' = +\frac{1}{8}R^2$$

$$P'^2 - 4Q' = S, \text{ adeoque } Q' = \frac{1}{4}P'^2 - \frac{1}{4}S = \frac{1}{16}Q^2 - \frac{1}{4}S.$$

Quibus valoribus P', Q', R' substitutis, emerget æquatio cubica $y^3 + \frac{1}{4}Qy^2 + (\frac{1}{16}Q^2 - \frac{1}{4}S)y - \frac{1}{64}R^2 = 0$, cujus radices sunt a, b, c , ut constet.

Porro, quoniam ex tribus radicalibus $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, unaquæque potest esse vel affirmativa vel negativa, octo exorientur harum combinationes respectu signorum, quarum quatuor exponet x ubi datæ æquationis terminus penultimus est affirmativus, reliquas ubi est negativus. Et quo distinguantur in utroque casu combinationes idoneæ, observandum est, quod si R affirmativum sit, ob $R = -8\sqrt{R'}$, erit $\sqrt{R'}$ five $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$, negativum, unde necesse est ut ex tribus radicalibus una sit negativa & reliquarum rectangulum affirmativum, quò contentum sub omnibus evadat negativum. In hoc casu igitur prodeunt 4 radices seu valores x ,

$$x = \begin{cases} -\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ -\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ +\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ +\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} \end{cases}$$

Quod si R negativum sit, erit $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$ affirmativum, adeoque

$$x = \begin{cases} +\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \\ +\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ -\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} \\ -\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} \end{cases}$$

Ut si repetatur æquatio $z^4 - 86z^2 + 600z - 851 = 0$, æquatio cubica $y^3 + \frac{1}{2}Qy^2 + (\frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{2}S)y - \frac{1}{24}R^2 = 0$, substitutis æquipollentibus fiet $y^3 - 43y^2 + 675y - 5625 = 0$

$= 0$, cujus resolutio dabit $y = 25$, & dividendo per $y - 25 = 0$, eruetur quadratica $y^2 - 18y + 225 = 0$, cujus reductio dabit reliquas radices $y = 9 \pm 12\sqrt{-1}$. Dein extractis omnium radicibus quadraticis, nempe 5, necnon & $2\sqrt{3} \pm \sqrt{-3}$, per § 52; ob terminum penultimum 600x affirmativum, erit

$$x = \begin{cases} -5 + (2\sqrt{3} + \sqrt{-3}) + (2\sqrt{3} - \sqrt{-3}) = -5 + 4\sqrt{3} \\ -5 - (2\sqrt{3} + \sqrt{-3}) - (2\sqrt{3} - \sqrt{-3}) = -5 - 4\sqrt{3} \\ + 5 + (2\sqrt{3} + \sqrt{-3}) - (2\sqrt{3} - \sqrt{-3}) = +5 + 2\sqrt{-3} \\ + 5 - (2\sqrt{3} + \sqrt{-3}) + (2\sqrt{3} - \sqrt{-3}) = +5 - 2\sqrt{-3} \end{cases}$$

Ut antea. Ergo erit $x = \&c$. Cæterum facilius inventæ sunt radices æquationis biquadraticæ propositæ per *Newtoni* methodum inveniendi divisores, supra p. 176. Adeoque, non nisi deficientibus divisoribus rationalibus ad hasce confugiendum.

Notandum restat, quod minuendo quadruplâ ratione radices æquationis cubicæ methodo *Cartesianâ* adscitæ $y^3 + 2Qy^2 + (Q^2 - 4S)y - R^2 = 0$, immediate elicietur *Euleri* æquatio cubica $y^3 + \frac{1}{2}Qy^2 + (\frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{4}S)y - \frac{1}{8}R^2 = 0$.

Aliam insuper methodum, & elegantem quidem (ut semper) educendi radices biquadraticarum mediantibus cubicis docet *Simpson, Algeb.* p. 150, &c. ubi varia proponit artificia ad laborem calculi quibusdam in casibus particularibus minuendum. Verum de his satis.

231. Methodus generalis resolvendi æquationes quintæ altiorumve dimensionum hæcenus desideratur; idque forsan haud magno analystarum detrimento, si modo ingentium calculorum in hisce necessario instituendorum habeatur ratio. Pergamus itaque modos quamproxime eruendi radices æquationum irrationales docere. At priùs de inventione limitum inter quos consistunt singulæ radices agendum.

DE LIMITIBUS RADICUM SINGULARUM ÆQUATIONIS.

232. Si in æquatione quacunque, binis quibusdam numeris pro x successive substitutis, numeri resultantes contrariis afficiantur signis, æquatio unam *saltem* radicem realem habebit inter hosce numeros substitutos interjectam. Potest vero habere plures, quarum numerus semper erit impar.

233. Si in æquatione quacunque unam aut plures radices inæquales habente, successive substituantur pro x duo numeri quorum unus est major, alter minor unâ radicem realium, & quorum differentia simul sit minor differentiâ inter hanc radicem & reliquarum proximam intercedente, numeri resultantes necessario contrariis afficientur signis, & unica tantum radix realis inter hosce numeros substitutos jacebit.

234. Quo eruatur autem numerus minimâ differentiarum inter binas quasque radices intercedente minor; primo inveniatur æquatio quadratorum differentiarum radicum, $z^r - P'z^{r-1} + \&c. = 0$, per § 177. Dein sub-

stituendo $\frac{1}{u}$ pro z , inveniatur æquatio $u^r - P''u^{r-1} +$
 &c. = 0, cujus radices erunt præcedentium reciprocæ.
 Quærat limes radicum hujus affirmatarum per § 190,
 puta l , eritque $\frac{1}{l}$ minor radice minimâ affirmatâ $\frac{1}{u}$ seu
 z ; adeoque $\frac{1}{\sqrt{l}}$ necessario erit minor quâlibet differentia-
 rum radicum realium & inæqualium datæ æquationis. Et
 si sumatur δ integer æqualis aut proxime major quam $\sqrt{l}$,
a fortiori, erit $\frac{1}{\delta}$ minor quâlibet differentiarum, &c. De-
 nique substituendo successive in æquatione datâ terminos
 progressionis $0, \frac{1}{\delta}, \frac{2}{\delta}, \frac{3}{\delta},$ &c. pro z , numeri resultantes
 tot exhibebunt variationes signorum quot habet æquatio
 radices reales & affirmativas, & unaquæque radicum inæ-
 qualium inter limites $\frac{m}{\delta}$ & $\frac{m+1}{\delta}$ jacebit, si modo nume-
 rorum resultantium signa prodibunt contraria. Sive, quod
 eodem redit, & in praxi facilius erit, multiplicentur ra-
 dices datæ æquationis per δ , § 163, et in æquatione resul-
 tante substituantur successive termini progressionis $0, 1, 2,$
 $3,$ &c. usque ad extremos limites radicum affirmatarum.
 Et hoc pacto invenientur limites inter singulas æquationis
 resultantis radices, qui utique per δ divisi dabunt limites
 inter singulas radices inæquales affirmativas datæ æquati-
 onis. Et similiter, limites inter singulas radices negativas
 invenire licet. Quod si termini ita substituti dant zero,
 erunt ipsæ radices æquationis.

COR. Hinc, si $\sqrt{i}$ prodeat unitate minor, erit $\frac{1}{\sqrt{i}}$ unitate major, adeoque æquatio aut unicam sortiatur radicem realem affirmativam, aut si plures, erunt binarum quarumque differentia unitate majores; & conversim: in hoc casu usurpare licet $\delta = 1$. Quod si $\sqrt{i}$ prodeat major unitate, æquatio habere potest radices quarum differentia sint unitate minores.

Hujus methodi auctor est *La Grange*, cæterum in æquationibus superiorum dimensionum parum utilis evadit, cum quantitatem $\frac{1}{\sqrt{i}}$ in hisce eruere valde operosum foret. In praxi commodior erit methodus insequens.

235. Primo, minuantur radices datæ æquationis quantitate quadam cognitâ, § 156, & successive substitutis pro x terminis progressionis 0, 1, 2, &c. quærantur ex variatione signorum coefficientium novæ æquationis limites integri quorum differentia est 1. Dein, dupla ratione augeantur radices novæ æquationis, & quærantur limites radicum æquationis jam resultantis quorum differentia est 1, nam inde innotescunt limites arctiores radicum datæ æquationis, quorum nempe differentia est $\frac{1}{2}$. Atque

iterum augeantur dupla ratione radices æquationis novissimæ, & quærantur hujus limites, inde vero innotescunt limites radicum datæ æquationis adhuc arctiores, quorum nempe differentia est $\frac{1}{4}$. Et sic deinceps.

Ut si proponatur æquatio $x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 15x^3 - 10x^2 - x + 1 = 0$, erit

	$x=$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0
$x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 15x^3 - 10x^2 - x + 1$		+	-	+	+	+
$6x^5 - 25x^4 + 8x^3 + 45x^2 - 20x - 1$		+	+	-	+	-
$15x^4 - 50x^3 + 12x^2 + 45x - 20$		+	+	-	+	-
$20x^3 - 50x^2 + 8x + 15$		+	+	-	-	+
$15x^2 - 25x + 2$		+	+	+	-	+
$6x - 5$		+	+	+	+	-
1		+	+	+	+	+

Ubi observandum, quod substituto 4 pro x , coefficientes omnes novæ æquationis emergunt affirmativæ; ergo, $+4$ erit maximæ radicis a limes. Substituto autem $+3$, prodit una variatio signorum; ergo maxima radix a inter limites 4 & 3 consistet. Et substituto $+2$, prodeunt duæ variationes signorum, ergo secunda radix b , inter limites 3 & 2 consistet. Et substituto $+1$, prodeunt duæ variationes, substituto autem 0, quatuor; ergo tertia & quarta radix c & d inter limites 1 & 0 consistent.

236. Jam quo eruantur limites radicum negativarum, mutatis signis terminorum alternorum, fiet.

	$x=$	0	-1	-2
$x^6 + 5x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 10x^2 + x + 1$		+	-	+
$6x^5 + 25x^4 + 8x^3 - 45x^2 - 20x + 1$		+	-	+
$15x^4 + 50x^3 + 12x^2 - 45x - 20$		-	+	+
$20x^3 + 50x^2 + 8x - 15$		-	+	+
&c.		+	+	+

&c.

$$\begin{array}{ll} a = 3,303 & e = -0,303 \\ b & 2,618 \quad f = -1,618. \\ c & 0,618 \\ d & 0,383 \end{array}$$

Ut ex compositione manifestum erit.

Atque hic observandum est, quod inventis signis coefficientium æquationis transformatæ principis $x^6 - 5x^5$ &c. $= 0$, ex substitutione 0, 1, 2, 3, &c. successive pro x , oriundis, simul determinantur signa coefficientium secundæ $x^6 - 10x^5$ &c. $= 0$, ex substitutione 0, 2, 4, 6, &c. oritura, utpote quæ necessario eadem erunt respective. Adeo ut hac methodo requiritur solummodo operatio substituendi in æquatione posteriore numeros intermedios 1, 3, 5, &c.

238. Hac methodo inveniri possunt limites radicum realium inæqualium æquationis, non obstantibus radicibus impossibilibus. Sic habitâ æquatione $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$, erit

	x	2	1	0
$x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$		+	+	-
$4x^3 - 3x^2 - 10x + 12$		+	+	+
$6x^2 - 3x - 5$		+	-	-
$4x - 1$		+	+	-
1		+	+	+

Ex hac operatione constat quod una saltem erit radix affirmativa inter 0 & 1, & quod duæ inter limites 1 & 2 consistere possunt. Erit quoque

	x	0	-1	-2	-3
$x^4 + x^3 - 5x^2 - 12x - 6$		-	-	-	+
$4x^3 + 3x^2 - 10x - 12$	-	-	+	+	+
$6x^2 + 3x - 5$	-	-	+	+	+
&c.		+	+	+	+

Unde constat, quod una saltem erit radix negativa inter limites -2 & -3 , & quod tres esse possint affirmativæ; at hujus radices supra prodierunt $x = -1 \pm \sqrt{3}$, & $x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$: duæ igitur radices impossibiles in utroque

casu inter affirmativas latent. Hinc si operatione continuatâ quærantur limites arctiores, & inter limites binos successivos, binæ semper exsurgent radices affirmativæ aut binæ negativæ, indicio est æquationem radices æquales aut impossibiles fortiri.

239. Inventis hoc modo limitibus unius radicum inæqualium, facile determinari potest annon limes alteruter parte sui $\frac{1}{10}$ a verâ radice differt. Primo enim, loco x in æquationem substituatur limes inferior, iterumque hic limes parte sui $\frac{1}{10}$ auctus; si numeri resultantes prodeunt diversis affecti signis, indicio est limitem inferiorem parte sui $\frac{1}{10}$ a verâ radice non discrepare: contra, si numerorum resultantium signa sint eadem. Et similiter, substituatur

pro x limes superior, atque iterum hic limes parte sui $\frac{1}{10}$ diminutus; si numeri resultantes, &c. Hæc ita se habebunt ubi ipsorum limitum differentia major sit parte $\frac{1}{10}$ limitis inferioris in priore casu, superioris autem in posteriore; nam si minor sit parte decimâ &c. *a fortiori*, erit differentia inter alterutrum limitem & radicem adhuc minor parte decima totius limitis.

DE RESOLUTIONE ÆQUATIONUM PER APPROXIMATIONEM.

240. Resolutionem æquationum numeralium per approximationem primus instituit *Vieta*, at methodo valde operosa. Pars hæc doctrinæ æquationum in praxi utilissima, *Newtono* plurimum debet, qui duas tradidit methodas quamproxime eruendi radices æquationum numeralium in *Arithmetica Universalis*, Cap. *De limitibus æquationum*; et in tractatu *De analysi per æquationes infinitas*, Cap. 4. Harum priorem auctam promotamque jam proferemus.

241. Quoniam radicum singularum æquationis nullas radices impossibiles habentis quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radices major. Et eodem argumento, summæ biquadratorum, bicuborum pariumve deinceps potestatum radicum omnium transcendent potestates consimiles radices maximæ. Quoniam vero potestates altiores maximæ radices longe majore ratione crescunt quam consimiles potes-

tates reliquarum, (si modo inter radices ipsas notabile intercedat discrimen respectu magnitudinis) quo altius involvantur eo propius ad rationem æqualitatis inter se accedent potestates consimiles maximæ radicis & summæ radicum omnium. Ut si æquatio fit $x^3 - 19x + 30 = 0$, cujus radices sunt 2, 3 & -5 ; erit

$$5^2 : 5^2 + 3^2 + 2^2 :: 25 : 38 :: 1 : 1,52$$

$$5^4 : 5^4 + 3^4 + 2^4 :: 625 : 722 :: 1 : 1,1552$$

$$5^8 : 5^8 + 3^8 + 2^8 :: 390625 : 397442 :: 1 : 1,01745 \text{ \&c.}$$

$$5^{16} : 5^{16} + 3^{16} + 2^{16} :: 152587890625 : 152631002882$$

$$:: 1 : 1,000028 \text{ \&c.}$$

$$5^{32} : 5^{32} + 3^{32} + 2^{32} :: 1 : 1 + \frac{1853024483819137}{23283064365386962890625} ::$$

$$:: 1 : 1,00000008, \text{ \&c.}$$

Unde elicitur methodus insequens quamproxime eruendi radicem æquationis maximam seu a nihilo remotissimam.

242. *Quære summam quadratorum radicum & extrahere ejus radicem quadraticam; hæc enim radix major erit quam radix maxima æquationis. Sed ad radicem maximam propius accedes, si quæras summam biquadratorum & extrahas ejus radicem biquadraticam. Et adhuc propius, si quæras potestatem 8^{vam} summæ radicum & extrahas ejus radicem 8^{vam}. Atque ita deinceps in infinitum.*

Sic in præcedente æquatione erit radix quadratica summæ quadratorum $\sqrt{38} = 6,164\text{\&c.}$ $\sqrt[4]{722} = 5,86\text{\&c.}$

$$\sqrt[3]{397442} = 5,018\&c. \quad \sqrt[16]{152631002882} = 5,000028\&c.$$

$\sqrt[32]{3328306\&c.} = 5,00000001\&c.$ Liquet igitur quod in æquationibus radices inæquales habentibus, furdæ radices summarum potestatum successivarum radicum, decrefcendo ad verum valorem maximæ radiceis cito convergunt, & quo major fit inæqualitas radicum, eo citius.

243. Quod si duæ pluresve æquationis radices sint fere inter se æquales, ita ut radix maxima cum alterâ ejusdem circiter magnitudinis confocietur, furdæ radices, &c. successivæ ad verum valorem maximæ radiceis tardius convergent; adeoque necesse erit summas altiorum potestatum radicum quærere, earumque furdas radices extrahere quo eruatur maximæ radiceis valor quamproxime verus.

Ut si proponatur æquatio $8x^3 - 6x + 1 = 0$, ad tollendam coefficientem primi termini, posito $\frac{1}{2}y$ pro x , exsurget $y^3 - 3y + 1 = 0$. Et posito $Q = -3$ & $R = -1$, per § 170, prodit summa quadratorum radicum hujus $-2Q = 6$; summa biquadratorum $2Q^2 = 18$; summa 8 potest. $2Q(Q^3 - 4R^2) = 186$. At quoniam quadratum 6 seu 36 fit ad 18 in ratione 2 ad 1; hujus vero quadratum seu 324 ad 186 in ratione paulo minore tantum, constat radices furdas summarum potestatum hætenus inventarum non nisi tarde ad verum valorem maximæ radiceis convergere. Quæratur itaque summa 16 potestatum radicum $2Q^2(Q^6 - 24Q^3R^2 + 20R^4) = 25146$, ejus radix 16^{ma} prodit 1,8837&c. Quæratur iterum summa 32 potestatum $2Q(Q^{15} - 112Q^{12}R^2 + 1144Q^9R^4 -$

$2112Q^6R^6 + 660Q^3R^8 - 16Q^{10}) = 6 \times 97945135$, hujus autem radix 32^{ma} prodit $1,87947\&c.$ Consentientibus igitur hisce valoribus maximæ radicis solummodo in primo decimalium loco, colligere licet valorem ex summa 16 potestatum resultantem, ultra primam decimalem 8 non esse verum. Adeoque si maximæ radicis valor accuratius desideretur, necesse erit operationem continuando summam 64 potestatum radicum eruere, nempe $18 \times 1913111928 - 2396037$, cujus radix 64^{ma} prodit $1,87938530\&c.$ Consentientibus igitur hisce valoribus in tribus decimalium locis, colligere licet radicem summæ 32 potestatum maximam radicem vere exponere ad usque tertiam decimalem 9. Quanto propius ad veram radicem accedit radix summæ 64 potestatum, iisdem vestigiis insistendo detegere licet; facilius vero methodo insequenti.

244. Quoniam differentia radicum summæ 32 & 64 potestatum, nempe $0,0000847\&c.$ prodit pars 22000^{ma} circiter posterioris (cum hæc differentia toties saltem in $1,87938\&c.$ continetur) colligere licet priorem excedere maximam radicem parte sui 22000^{ma} circiter. Unde, si tres radices designent a, b, c , quorum maxima fit a , habetur $(a^{32} + b^{32} + c^{32})^{\frac{1}{32}} = a + \frac{1}{22000} a$. Et quoniam duæ radices in hac

æquatione fere æquales necessario erunt a & b , vel b & c ; fit 1^{mo} a ferme æqualis b . In hoc casu, b (ob defectum termini secundi) tantum exsuperabit c , ut c^{32} quam minimum erit respectu $a^{32} + b^{32}$, adeoque tuto negligi potest. Erit igitur

Adeoque in hoc casu a fewior radicem ad usque
decimalem & ultra, vale detegere

$$(a^{32} + b^{32} *)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{1}{22000} a$$

$$\text{Et } a^{32} + b^{32} = a^{32} + \frac{32}{22000} a^{32} + \frac{32 \cdot 31}{2 \cdot 22000^2} a^{32} + \&c.$$

$$\text{Itemque } b^{32} = \frac{32}{22000} a^{32} \text{ fere, } = \frac{2}{11 \times 5^3} a^{32}$$

$$\text{Adeoque } b^{64} = \frac{4}{11^2 \times 5^6} a^{64}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } (a^{64} + b^{64})^{\frac{1}{4}} &= (a^{64} + \frac{4}{11^2 \times 5^6} a^{64})^{\frac{1}{4}} \\ &= a (1 + \frac{4}{11^2 \times 5^6})^{\frac{1}{4}} = a \left(\frac{1890629}{1890625} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Unde liquet radicem 64^{am} , 1,8793853 valorem maximæ radicis ad usque 6^{um} decimalium locum & ultra, vere designare.

2^{do}. Sit b ferme æqualis c . In hoc casu erit

$$(a^{32} + 2b^{32})^{\frac{1}{2}} = a + \frac{1}{22000} a$$

$$\text{Et } a^{32} + 2b^{32} = a^{32} + \frac{32}{22000} a^{32} + \&c.$$

$$\text{Itemque } 2b^{32} = \frac{32}{22000} a^{32} = \frac{2}{11 \times 5^3} a^{32}$$

$$\text{Adeoque } 4b^{64} = \frac{4}{11^2 \times 5^6} a^{64}, \& 2b^{64} = \frac{2}{11^2 \times 5^6} a^{64}$$

$$\text{Et } (a^{64} + 2b^{64})^{\frac{1}{4}} = (a^{64} + \frac{2}{11^2 \times 5^6} a^{64})^{\frac{1}{4}} = a \left(\frac{1890627}{1890625} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Adeoque in hoc casu, *a fortiori* liquet, radicem ad usque 6^{am} decimalem & ultra, vere designari.

Radici maximæ y sic inventæ 1,879385 &c. præponendum signum —, substituto enim — 1,879385 pro y , accedit $y^3 - 3y + 1$ propius ad nihil; nempe — 6,636293 &c. + 5,638155 &c. + 1 = 0,001 &c.

245. Inventâ maximâ radice, inveniuntur reliquæ, depressendo æquationem cubicam ad quadraticam ope divisoris inde resultantis, cujus reductio dabit reliquas radices.

Aut simili methodo erui potest radix minima, inveniendo maximam radicem æquationis $z^3 - 3z^2 + 1 = 0$, cujus radicēs sunt præcedentium reciprocæ, ut patebit substituendo $\frac{1}{z}$ pro y ; nam inventâ maximâ hujus radice $\frac{1}{c}$, per § 169, aut per formulas defectui tertii termini accommodandas, habetur $c = 0,347296$. Habitis igitur radicibus extremis, habetur media radix $b = 1,532088$ &c. utpote reliquarum complementum ad nihil. Ergo ob $x = \frac{1}{2}y$, procedunt radices datæ æquationis $8x^3 - 6x + 1 = 0$,
— 0,939692 &c. + 0,766044 &c. + 0,173648 &c.

246. Ubi vero duæ pluresve æquationis radices sunt æquales, hæc, si iisdem signis afficiuntur, facilius eruere licet per methodum § 202, &c. Et si contrariis, licet per istam methodum immediate eruendæ non sunt, tamen quærendo æquationem quadratorum radicum, quæ tot fortietur radices æquales quot erant in datâ, atque signis affirmativis affectas, hæc per istam methodum eruere licet, et extractis harum radicibus quadraticis innotescunt radices æquales datæ æquationis.

247. Quod si summarum potestatum successivarum hac methodo inveniendarum, prodit aliqua negativa, aut quadratum alicujus minus summâ potestatum proxime insequente; indicio est æquationem radices impossibiles fortiri. Veruntamen non obstant radices impossibiles quo minus eruantur radices reales, si modo ex summis potestatum successive resultantibus quadratum cujusque præcedentis ad insequentem propius semper accedet.

Sic habita æquatione $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$, quærendo æquationes quarum radices sunt quadrata, biquadrata, &c. radicum datæ æquationis per § 169; summas quadratorum, biquadratorum, $8p$, $16p$, respective exponent 17, 317, 100709, 101423811189. Et cum $17^2 = 289$ prodit minus quam 317, indicio est æquationem radices impossibiles fortiri; quoniam vero haud multum deficit a 317, hujus verò quadratum 100489 propius adhuc accedit ad 100709, non necesse erit summas potestatum ultra quærere ad radicem proxime eruendam. Erit igitur

$(100709)^{\frac{1}{17}} = 4,2195$, et $(101423811189)^{\frac{1}{317}} = 4,220690$; quarum prior valorem radice vere exprimet ad usque primam decimalem 2 tantum, posterior vero ad usque quintam 9 inclusive; sicuti per methodum præcedentem colligere licet.

Habita quoque æquatione $y^3 - 2y - 5 = 0$, summas quadratorum, biquadratorum, $8p$, $16p$, $32p$, radicum exponent 4, 8, 432, 138912, 18833326272 respective. Et cum 8^2 seu 64 prodit minus quam 432, indicio est æquationem radices impossibiles fortiri; quoniam vero quadratum hujus 186624 jam propius accedit ad 138912, at in-

tervallo majore quidem quam in exemplo novissimo, extrahenda erit radix 32^p. Hæc autem prodit 2,09457 affirmative ponenda per § 148, quæ utique radicem ad usque 4^{ta}m decimalem 5, vere exprimet.

248. Hæc methodus radicibus maximis & minimis tantum æquationis educendis immediate inservit, idque calculo satis operoso, ubi duæ pluresve radices sint inter se æquales aut accurate aut quamproxime; tardius nimirum ad verum radicis valorem convergentibus surdis radicibus summarum potestatum successivarum: & interdum, perturbantibus radicibus impossibilibus, deficit. Methodus altera *Newtoni* jam explicanda præ cæteris simplex & usui accommodatâ videtur: Æquationes in quibus aliqui vel nulli termini desint, eâdem fere facilitate tractantur; et singulis æquationum radicibus educendis æque respondet.

METHODUS ALTERA.

249. Sit æquatio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ resolvenda: inveniat per § 239, aut per methodum præcedentem, k limes qui minus quam parte sui decimâ differt a radice quæsitâ. 1^{mo}. Sit p cum proprio signo hujus complementum ad verum radicis valorem, & substituto $k + p$ pro x in æquationem, prodit per § 156, nova $(k^3 + ak^2 + bk + c) + (3k^2 + 2ak + b)p + (3k + a)p^2 + p^3 = 0$ (incipiendo nimirum a termino ultimo). Sive, designantibus A, B, C, D numeros coefficientes respective, $A + Bp + Cp^2 + Dp^3 = 0$. Et sic universaliter: habitâ æquatione $x^n + ax^{n-1} +$

+ $bx^{n-2} + \&c. = 0$, substituendo $k + p$ pro x , erunt
coefficientes novæ æquationis,

$$A = k^n + ak^{n-1} + bk^{n-2} + ck^{n-3} + \&c.$$

$$B = nk^{n-1} + n-1 . ak^{n-2} + n-2 . bk^{n-3} + \&c.$$

$$C = n . \frac{n-1}{2} k^{n-2} + n-1 . \frac{n-2}{2} ak^{n-3} + \&c.$$

&c.

&c.

Æquationis igitur resultantis $A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \&c. = 0$, radix p exquirenda est, ut quotienti k addatur; nempe (neglectis terminis Cp^2 , Dp^3 , &c. ob parvitatem)

$$A + Bp = 0, \text{ five } p = -\frac{A}{B} \text{ fere. } 2^{\text{do}}. \text{ Sit } q \text{ cum proprio}$$

signo hujus complementum ad verum valorem p , & perinde substituto $-\frac{A}{B} + q$ pro p , in æquationem resultantem, prodit

$$\text{nova } A' + B'q + C'q^2 + D'q^3 + \&c. = 0, \text{ et neglectis terminis } C'q^2 + D'q^3 + \&c. \text{ ut antea, erit } q = -\frac{A'}{B'} \text{ fere. } 3^{\text{tio}}. \text{ Sit } r$$

hujus complementum ad verum valorem q , & substituto $-\frac{A'}{B'} + r$ pro q , in æquationem ultimo resultantem, pro-

$$\text{dit } A'' + B''r + C''r^2 + D''r^3 + \&c. = 0, \text{ adeoque } r = -\frac{A''}{B''} \text{ fere. Et sic operatione quousque placuerit conti-}$$

$$\text{tinuatâ, tandem emergit } x = k - \frac{A}{B} - \frac{A'}{B'} - \frac{A''}{B''} - \&c.$$

quam proxime. Quo propius autem accedit k ad verum radicis valorem, eo pauciora complementa adhibere opus erit ad radicem quamproxime eruendam.

250. Emergente, per primam operationem, $p = \frac{-A}{B} - \frac{C}{B} p^2 - \frac{D}{B} p^3 - \&c.$ quot ad loca decimalium primus hujus terminus $\frac{-A}{B}$ valorem p fere designabit, cæteris neglectis; seu, quousque continuanda est divisio numeratoris A per denominatorem B , antequam reliqui termini $\frac{C}{B} p^2, \frac{D}{B} p^3$ valorem quotientis resultantis afficiant; sic investigare licet.

Quoniam p , utpote per hypothesin minus quam $\frac{1}{10} k$, est fractio decimalis unitate minor, si habeat cifras aliquas decimales primæ ejus figuræ signifianti præfixas, potestates ejus $p^2, p^3, p^4, \&c.$ saltem duplo, triplo, quadruplo, &c. plures cifras decimales præfixas habebunt respective. Adeoque 1^{mo}. Si coefficientes $\frac{C}{B}, \frac{D}{B}, \&c.$ sint quoque decimales unitate minores, & quæ cifras aliquas decimales habeant præfixas, terminus quisque $\frac{C}{B} \times p^2, \&c.$ tot saltem habebit cifras decimales præfixas quot sunt in utroque factore simul. Et 2^{do}. Si coefficientes $\frac{C}{B}, \&c.$ sint unitate majores, erit numerus cifrarum decimalium termino cuique $\frac{C}{B} p^2, \&c.$ præfixarum æqualis excessui cifrarum decimalium in $p^2, \&c.$ præ locis integris in $\frac{C}{B}, \&c.$ respective:

ut ex multiplicatione decimalium constat. Unde in omni casu, cognito numero cifrarum decimalium complemento p præfixarum, innotescet numerus cifrarum decimalium cui-

que terminorum insequentium post primum, scil. $\frac{C}{B}p^2, \frac{D}{B}p^3$, &c. præfigendarum; atque inde regrediendo, facile con-

stabit, quod primus terminus $\frac{A}{B}$ valorem p ad tot loca

decimalium fere designabit, quot habet cifras decimales

præfixas secundus terminus $\frac{C}{B}p^2$, &c. Itemque, quod

duorum aggregatum $\frac{A}{B} + \frac{C}{B}p^2$ tot ad loca decimalium

valorem p fere designabit, quot habet cifras decimales

præfixas tertius terminus $\frac{D}{B}p^3$. Et sic deinceps. Ac simi-

liter, determinare licet ad quot loca decimalium termini

$\frac{A'}{B'}$ & $\frac{A''}{B''}$ complementa successiva q & r respective,

fere exponent.

251. Cæterum si quæras an valores modo inventi

$\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'},$ &c. veris valoribus $p, q,$ &c. respective majores

vel minores sint; hoc inveniri potest, substituendo $\frac{A}{B}$ pro p

in æquationem $A + Bp + Cp^2$ &c. $= 0$, nam si numerus re-

sultans affirmativus sit, $\frac{A}{B}$ major erit veritate, si negati-

vus sit, minor. Et sic in cæteris. Idem quoque facilius

innotescet ex operatione proximâ, substituendi nimirum

$-\frac{A}{B} + q$ pro p ; nam si ex æquatione resultante prodeat q affirmativus, indicio est quod $-\frac{A}{B}$ est minor, sin q fit negativus, major quam verus valor p .

252. *Ex.* Repetatur æquatio $y^3 - 2y - 5 = 0$, per methodum priorem reducta, § 247. Et si ab initio auspicari cum *Newtono* placuerit, inveniatur per § 239, limes inferior 2, qui minus quam decimâ sui parte differt a radice quæsitâ. 1^{mo}. Substituatur $2 + p$ pro y in æquationem, & prodibit nova $-1 + 10p + 6p^2 + p^3 = 0$, five (neglectis

$6p^2 + p^3$ ob parvitatem) $-1 + 10p = 0$, et $p = \frac{1}{10} = 0,1$

fere. 2^{do}. Substituatur jam $0,1 + q$ pro p in æquationem resultantem, & emerget $+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3 = 0$, five, neglectis, ut antea, terminis in quibus q ultra primam dimensionem assurgit, $q = \frac{-0,061}{11,23} = -0,0054$

fere (dividendo nempe ad usque quatuor decimalium loca, cum q duas habet cifras decimales primæ suæ figuræ significanti 5 præfixas, adeoque q^2 necnon & $\frac{6,3q^2}{11,23}$ quatuor ha-

bebit, per § 250. Et proinde hic terminus $\frac{6,3q^2}{11,23}$ valorem

p ex secundâ operatione resultantem non afficiet intra limites quatuor locorum decimalium.) 3^{mo}. Substituatur iterum $-0,0054 + r$ pro q in æquationem novissimam, & emerget $0,000541550536 + 11,16204748r + 6,2838r^2$

$$+ r^3 = 0, \text{ five } r = \frac{-0,000541550536}{11,16204748} = -0,00004851 \text{ fere}$$

(dividendo nempe donec octo eliciantur decimalium loca, cum r habet 4 cifras decimales primæ suæ figuræ signifi-

canti 4 præfixas, adeoque r^2 necnon & $\frac{6,2838r^2}{11,16204748}$ octo

habebit.) Prodit igitur

$$\begin{array}{lcl} k = + 2 & \} & = - - - + 2,10000000 \\ p = + 0,1 & \} & \\ q = - 0,0054 & \} & = - 0,00544851 \\ r = - 0,00004851 & \} & \end{array}$$

$$\therefore y = - - - = + 2,09455149.$$

Ad minuendum substituendi laborem in tertia operatione, terminum altissimum q^3 æquationis secundò resultantis propter exilitatem suam negligit *Newtonus*, unde subrepat error in ultimum figuram 3 valoris r hoc pacto elicit, 0,00004853. Minui quoque potest dividendi labor, quoniam quatuor tantum desiderantur figuræ decimales significantes in quotiente, abscindendo figuras significantes numeratoris ultra quatuor primas, itemque denominatoris (ob parvitatem figurarum ab initio) ultra quinque primas:

$$\text{erit enim } \frac{-0,0005415}{11,162} = -0,00004851 \text{ ut antea.}$$

Observandum est, quod qualibet operatione duplicantur figuræ decimales radici adjiciendæ. Atque in hac methodo ita semper se res habebit, nisi forsan ubi $\frac{C}{B}$ fit uni-

tate major, quo in casu, figurarum radices ultimarum aliquot per terminum $\frac{C}{B} p^2$ affici possunt. Quoad materiam, vix differt hæc methodus ab illâ quam tradidit *Ralphson*, in *Analyfi Æquationum Universali*, an. 1690, quæ utique similiter procedit assumendo duos terminos ultimos tantum æquationis ex quaque operatione resultantis.

253. Accuratius autem eruetur valor p , assumendo tres terminos ultimos æquationis resultantis, nempe $A + Bp + Cp^2 = 0$, seu $A + (B + Cp) p = 0$; unde prodit $p = \frac{-A}{B+Cp}$, seu, substituendo $\frac{-A}{B}$ in denominatorem pro p , $= \frac{-A}{B - \frac{CA}{B}}$, vel $= \frac{-AB}{B^2 - AC}$; quarum prior formula praxi

magis accommodata videtur, re nimirum per unam multiplicationem & duas divisiones peractâ, quæ in posteriore per tres multiplicationes ac unam divisionem procedit. Et hoc est theorema *rationale Halleianum*, *Phil. Trans.* an. 1694, N° 210 *. Aut aliquantò accuratius, per extractionem radices furdæ quadraticæ, unde prodit

* *Analyfin per æquationes infinitas excogitavit Newtonus saltem ante annum 1665. Vid. p. 33. Hanc a Newtono acceptam cum Johanne Collins communicavit Barrow, anno 1669. Eandemque in scriniis Johannis Collins repertam primus edidit Jones, an. 1711. Methodi Newtonianæ proxime eruendi radices æquationum numeralium & literalium, duobus terminis tantum æquationis resultantis adhibitis, exemplum dedit Wallis in Algebra, an. 1683, Anglice editâ. De quo ita Halley, loc. cit. "Qualia in hoc negotio [resolvendi æquationes numerales] præstiterit sagacissima ingenii Newtoniani vis, ex contractiore specimine a clarissimo Wallisio; Cap. 94, Algebræ suæ edito, potius conjecturâ assequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obstinata auctoris modestia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc sua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur."*

$p = \frac{-\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC}}{C}$, quarum feligenda est minor ra-

dix $\frac{-\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC}}{C}$, (in quâ utique partes $\frac{\frac{1}{2}B}{C}$ & $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC}}{C}$

contrariis signis afficiuntur) tum ob parvitatem ipsius p , tum

quod hæc radix ad valorem prius inventum $-\frac{A}{B}$ pròpius ac-

cedit. Et hoc est theorema *irrationale Halleianum*, loco. cit.

Sic in præcedente exemplo, per theorema *rationale*, prodit

$p = \frac{1}{10 + \frac{1}{10}} = \frac{1}{10,6} = 0,0943\&c.$ et per theorema *irra-*

onale, prodit $p = \frac{-5 + \sqrt{31}}{6} = 0,9462\&c.$ quorum prior

valor consentit cum valore $p + q$, per *duas* operationes methodi præcedentis elicitò, in duobus locis figurarum decimalium; pòsterior autem, in tribus. Atque hinc forsan theorema *irrationale* tantum, utpote accuratius, commendat *Newtonus*: utrumque tamen adhibere haud importunum erit, uno nimirum corrigente alterum.

254. Quoniam verò in hujusmodi approximationibus maximi momenti est determinatio primæ figuræ decimalis complementi p , hanc quidem, tribus terminis ultimis adhibitis semper explorare convenit ubi in æquatione $A + Bp + Cp^2 \&c. = 0$, quadratum coefficientis penultimi termini B^2 non fit decies majus quam factus ex ultimo termino A in coefficientem termini antepenultimi C .

Nam quoniam valor p , adhibitis duobus terminis ultimis tantum æquationis resultantis, fit $-\frac{A}{B}$ fere; adhi-

bitis autem tribus, fit $\frac{-AB}{B^2-AC}$ accuratius, $= \frac{-A}{B} - \frac{A^2C}{B^3}$ circiter: (ut patebit dividendo $-AB$ per $B^2 - AC$) differentiam horum valorum fere exponet $\frac{-A^2C}{B^3} = \frac{AC}{B^2} \times \frac{-A}{B}$. Unde posito $\frac{AC}{B^2} = \frac{1}{10}$, differentia valorum evadet $\frac{1}{10} \times \frac{-A}{B}$ fere, hoc est, pars decima fere totius valoris prioris; posito $\frac{AC}{B^2} = \frac{1}{9}$, evadet major parte decimâ totius; posito $\frac{AC}{B^2} = \frac{1}{8}$, evadet adhuc major parte decimâ totius: et sic deinceps, crescente valore $\frac{AC}{B^2}$, seu quod perinde est, decrecente ratione B^2 ad AC , eo magis recedet prior valor $\frac{-A}{B}$ a posteriore $\frac{-AC}{B^2-AC}$, five, *a fortiore*, a valore accuratiore $\frac{-\frac{1}{2}B + \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC}}{C}$. Hinc, si B^2 non fit decies majus quam AC , differentia valorum tanta esse potest, quanta errorem in ipsam primam figuram decimalem prioris valoris $\frac{-A}{B}$ inducat. Quod si B^2 fit decies aut plus quam decies majus quam AC , differentia ista figuras decimales in $\frac{-A}{B}$ post primum locum tantum afficiet. Et similiter, si B^2 fit centies majus quam AC , figuras deci-

males post secundum locum tantum; si millies, post tertium locum tantum afficiet. Atque ita in cæteris q, r, s , &c.

Observandum est, quod ope theorematís *irrationalis* qualibet vice triplicatur numerus locorum decimalium radici per præcedentem operationem adjiciendorum, per § 250. Hoc pacto igitur figuras decimales duplo plures quam per methodum præcedentem, qualibet vice radici lucraberis.

255. Hinc si radicem ad usque quintum aut sextum decimalium locum tantum quæras, in præxi plerumque facilius erit utramque methodum adhibere. Eruendo nimirum valorem primi complementi p ex tribus ultimis terminis æquationis resultantis; deinde *Halleium* secuti, opus de integro repetere, substituendo in æquationem datam, valorem radicis jam inventum $+ q$ pro x ; (præsertim ubi aliquis terminus datæ æquationis deest, hoc pacto enim minuitur substituendi opus) unde ex binis terminis æquationis ultimò resultantis habebitur q . Sic ex consensu theorematís *rationalis* & *irrationalis* prodit $p = ,094$: deinde substituendo in æquationem datam $2,094 + q$ pro x , prodit nova $- 0,006153416 + 11, 154508q + \&c. = 0$, adeoque $q = + \frac{0,006153416}{11,154508} = + 0,000551$. Adeoque $x = 2,094 + q = 2,094551$.

256. Quod si radix ad plurima decimalium loca desideratur quam proxime, laborem plerumque minues, præsertim in æquationibus superiorum dimensionum, si singula complementa p, q, r , &c. extrahendo minorem radicem ex tribus ultimis terminis æquationis novissimè resultantis exquiras.

Ex. 2. Proponatur æquatio $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$, cujus radicem in solutionem diffi-

cillimi problematis Arithmetici, *Vieta* methodo, accuratissime affectus est *Wallis*, *Algeb.* Cap. 62; quamque itidem methodi suæ exemplum affert *Ralphson*, p. 25, 26. Ejusmodi autem formæ est hæc æquatio, ut plures habeat radices affirmativas, & quod resolvendi difficultatem adaugeat, prægrandes sunt coefficientes ejus respectu termini ultimi.

Minuendi gratiâ, dividantur hujus radices per denarium, & prodibit $y^4 - 8y^3 + 20y^2 - 15y + 0,5 = 0$. Invenitur limes hujus $k = 1$, & substituendo $1 + p$ pro y , prodibit nova $-1,5 + 5p + 2p^2 - \&c. = 0$, adeoque per extractionem radices minoris, erit $p = \frac{-5 + \sqrt{37}}{4} = 0,27$.

& $y = 1 + p = 1,27$: adeoque $x = 10y = 12,7$. Substituatur iterum $12,7 + q$ pro x , in æquationem datam, & prodibit $-298,6559 + 5296,132q - 82,26q^2 - \&c. = 0$, adeoque $q = \frac{2648,066 - \sqrt{6987686,106022}}{82,26} = 0,05644080$

&c. Per theorema *rationale* quoque prodibit $q =$

$$= \frac{298,6559}{5296,132 - \left(\frac{82,26 \times 298,6559}{5296,132} \right)} = \frac{298,6559}{5296,132 - 4,63875} =$$

0,05644075 &c. Unde, his valoribus collatis, certi esse possumus q fere designari ad usque quinque decimalium loca saltem; adeoque erit $x = 12,7 + q = 12,75644$ proxime. Et si plures desiderentur radices figuræ, de integro repetatur calculus, substituendo $12,75644 + r$ pro x in æquationem datam, & assumptis tribus terminis æquationis resultantis, prodibit $r = 0,000001794480744$: adeoque radix accuratissima fit $12,756441794480744$. redintegratione calculi nimirum triplicante numerum figurarum decimalium prius inventarum.

257. Labor hujus methodi præcipuus in operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: id quod varie perficias, sequentem modum maxime expeditum censet *Newtonus*, præsertim ubi numeri coefficientes constant ex pluribus figuris.

Repetatur æquatio præcedens $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$. Resolvi hæc potest in factores hujus formæ,

$$(x - 80 | \times x | + 1998 | \times x | - 14937 | \times x | + 5000 = 0.$$

Ubi prodit primus $x - 80$; secundus, x ; tertius, factus ex præcedentibus una cum 1998; quartus, x ; quintus, factus ex præcedentibus una cum -14937 ; sextus, x ; et facto sub omnibus adjiciendus 5000. Substituendo autem in singulis factoribus $12,7 + q$ pro x , erit

$$\begin{array}{r} \text{I.} \quad - \quad 67,3 + q \\ \times \quad 12,7 + q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{II.} \quad - \quad 854,71 - 54,6q + q^2 \\ \quad \quad + \quad 1998 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{III.} \quad + \quad 1143,29 - 54,6q + q^2 \\ \times \quad 12,7 + q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{IV.} \quad + \quad 14519,783 + 449,87q - 41,9q^2 + \&c. \\ \quad \quad - \quad 14937 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{V.} \quad - \quad 417,217 + 449,87q - 41,9q^2 \\ \times \quad 12,7 + q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{VI.} \quad - \quad 5298,6559 + 5296,132q - 82,26q^2 - \&c. \\ \quad \quad + \quad 5000 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{VII.} \quad - \quad 298,6559 + 5296,132q - 82,26q^2 - \&c. = 0.$$

258. Hæc methodus radicibus æquationum tam purarum quam affectarum educendis infervit, & proinde in extrahendis radicibus numerorum altioribus utilis erit. Vide *Halley*, loco. cit. Porro, inventâ quotiente k, p , &c. æquatio semper relinquitur cujus radix unâ cum acquisitâ quotiente adæquat radicem æquationis primo propositæ. Unde examinatio operis hic æquæ poterit institui ac in reliquâ Arithmeticâ, auferendo nempe quotientem a radice primæ æquationis (sicut analytici notum est) ut æquatio ultima, vel termini ejus duo tresve ultimi, inde producantur. Sic invento $p = 0,1$, erit $k + p = 2,1$, adeoque substituendo $2,1 + q$ pro y , in æquationem primam $y^3 - 2y - 5 = 0$, prodibit $0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3 = 0$; ipsa nempe æquatio quæ ex substitutione $0,1 + q$ pro p in æquationem primo resultantem prodit: atque ita istius operationis veritas comprobatur.

259. Ex dictis facile judicabit lector, an valent multi nominis viri *La Grange* objectiones, *Dissert. Acad. Berlin*, an. 1768. nempe, quod methodo *Newtonianâ* ignoratur quantum ad veritatem accedit tum valor (k) primo assumptus, tum valor cujusque complementi insequentis, (p), (q), &c. Methodus certe, quam ut accuratiorem commendat, *Newtonianæ* facilitate longe cedit, quippe quæ ex inventione quantitatis $\sqrt{I}$, § 234, non nisi per tentamina valde laboriosa in æquationibus plurimarum dimensionum eruendæ, auspiciatur; per inventionem limitum æquationum ex binomijs compluribus successive substitutis resultantium, procedit; et per combinationem plurium fractionum continuarum ex hisce operationibus elicitarum, concludit.

260. Ad evitandum tertiæ substitutionis laborem in exemplo secundo, correctiones duas satis artificiosas adhibet *Halley*, quarum priore, notas veras in assumptâ (k) quintu-

plices reddit; posteriore autem, etiam duplum numerum cifrarum adjungit: ut omnino assumptas septuplicet. Cæterum iteratâ hâc operatione parùm promovetur calculus. Simili methodo infistit *Bernoulli, Lect. Calculi integ. Lect. 53.*

Possimus quoque *Le Marquis de Courtivron* atque *Eulerum* secuti, valorem p ex pluribus terminis æquationis resultantis elicere, substituendo nimirum in hanc æquationem valores p^3 , p^3 , &c. ex quaque præcedente operatione in-

ventos, scil. substituendo $\frac{A^2}{B^2}$ pro p^2 ; deinde, substituendo

$(-\frac{A}{B} - \frac{C}{B} \times \frac{A^2}{B^2})^3$ pro p^3 ; & sic deinceps. Unde elicitur

formula insequens, $p =$

$$-\frac{A}{B} - \frac{C}{B} \left(\frac{A}{B}\right)^2 - \left(\frac{2C^2 - BD}{B^2}\right) \left(\frac{A}{B}\right)^3 - \left(\frac{5C^3 - 5BCD + B^2E}{B^3}\right) \left(\frac{A}{B}\right)^4 -$$

&c. Sic repetito exemplo 1^{mo}. prodit $\frac{A}{B} = -\frac{1}{10} = -0,1.$

$$\frac{A^2}{B^2} = 0,01. \quad \frac{A^3}{B^3} = -0,001. \quad \frac{A^4}{B^4} = 0,0001. \quad \frac{C}{B} = 0,6.$$

$$\frac{2C^2 - BD}{B^2} = 0,62. \quad \frac{5C^3 - 5BCD}{B^3} = 0,78. \quad \text{Unde prodit } p =$$

$$+ 0,1 - 0,006 + 0,00062 - 0,000078 = 0,94542. \text{ Vide}$$

Mem. De l'Acad. Paris, 1744, p. 405. Præstat autem methodus *Newtoniana*, utpote quæ iteratâ operatione ad verum radicis valorem citius convergit.

Aliam approximandi methodum tradit *Taylor*, ex ipsius *Incrementorum* theoriâ petitam, *Phil. Trans.* an. 1717. Duas quoque, & egregias quidem, excogitavit *Simpson*, quarum prior per seriem infinitam citissime convergentem procedit, *Mathematical Dissertations*, p. 102; posterior verò ex calculo fluxionali pendet, *Essays on various subjects*, p. 81.

F I N I S.